L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques :
questions vives et problèmes cruciaux

Yves Chevallard

L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques : questions vives et problèmes cruciaux

Yves Chevallard

1. La notion de « problème de la profession »

La TAD et les métiers

La théorie anthropologique du didactique (TAD), dans laquelle s'inscrit ce cours, implique un élargissement de l'univers des objets auquel le didacticien se réfère. Je rappelle que la TAD étudie les *conditions et contraintes* de la diffusion sociale des *entités praxéologiques*, c'est-à-dire de leur diffusion aux *personnes* et aux *institutions*. Ces conditions et contraintes sont repérées sur une échelle dite des *niveaux de codétermination didactique* dont je ne présente ici, volontairement, qu'une partie :

…
↓↑
Civilisation
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Œuvre
↓↑
…

On ne s'étonnera donc pas que, même quand on s'interroge sur la diffusion sociale d'une œuvre déterminée, par exemple de telle œuvre *mathématique*, on ait à prendre en compte, le cas échéant, des conditions qui s'enracinent en particulier dans la *société* à laquelle on se réfère.

Si, en particulier, on se réfère à des œuvres relevant de ces champs praxéologiques que sont les mathématiques, la langue française, l'histoire, la physique et la chimie, etc., qui font dans l'école considérée l'objet d'un *enseignement* explicite et méthodique d'une « discipline » qui leur est dédiée, la diffusion repose en grande partie sur l'action d'un *corps de métier* formé de personnels voués à l'enseignement de cette discipline, soit de ce que j'appellerai les *professeurs* de cette discipline. Nombre de noms communs employés jusqu'ici l'ont été en un sens propre à la TAD : ainsi en va-t-il par exemple des mots *œuvre*, *discipline* ou encore *professeur*. Il en est de même du mot de *métier*. Ce mot appartient, certes, à la langue commune et je le prends ici, grosso modo, dans le sens connu de tous les locuteurs francophones. Ce sens permet de parler aussi bien du *métier de plombier* que du *métier de sociologue* (Bourdieu, Chamboredon & Passeron, 1968), du *métier de principal de collège* que du *métier de roi* (comme le faisait Louis XIV dans ses *Mémoires*, avec une majuscule à l'initiale de *roi*). Je parlerai donc du *métier de professeur de mathématiques* de notre enseignement secondaire, et aussi du *métier de chercheur en mathématiques* ou du *métier de chercheur en didactique des mathématiques*. (Dans ces deux derniers cas, je dirai, pour faire court : le métier de mathématicien, le métier de didacticien des mathématiques.)

Le métier et ses difficultés

Le *métier* de professeur de mathématiques, c'est ce à quoi doit se livrer quiconque *exerce* ce métier. Exercer le métier de médecin généraliste, c'est notamment recevoir des patients à son cabinet, les interroger, les ausculter, leur demander leur carte Vitale, rédiger des ordonnances ; et c'est aussi visiter des patients à domicile, etc. De même, exercer le métier de professeur de mathématiques conduit à accomplir ce que je nommerai les *gestes du métier* – par exemple « faire cours », « préparer son cours », « donner des devoirs », « corriger des devoirs », « rédiger un corrigé », « remplir des bulletins scolaires », etc. J'espère que ces illustrations sommaires suffiront à fixer convenablement le sens qu'il convient de donner ici au mot de métier. Ce qui importe maintenant est ceci : l'exercice d'un métier se heurte à des *difficultés*. J'use de ce mot – *difficulté* – parce qu'il me semble minimaliste : comme le dit naïvement un dictionnaire en ligne de la langue anglaise (le *MacMillan Dictionary*), "if you have difficulty with something, you are not able to do it easily"[1]. J'ajoute à cela un autre

[1] On peut songer aussi à parler d'*obstacle* – l'exercice d'un métier se heurte à des obstacles. La différence entre les deux est minime mais il est utile de la noter. Dans son *Dictionnaire de la langue française* (1872-1877), Littré écrit : « La difficulté implique qu'une chose est difficile à faire. L'obstacle n'implique pas cette idée et signifie qu'une chose est debout devant nous et s'oppose. » Dans son *Petit dictionnaire des synonymes français* (Hachette, 17^e^ tirage 1909), E. Sommer ajoute un troisième terme − *empêchement* – aux deux précédents – *difficulté, obstacle* − et précise alors (p. 116) : « La *difficulté* embarrasse, cause de l'hésitation ; l'*obstacle* arrête,

emprunt au même dictionnaire : “A difficult idea or situation is like a *knot* or something that is tied up, tangled, or twisted. When you deal with it successfully, it is like *untying* it and getting rid of the knots and tangles.” Se sortir d’une difficulté, c’est défaire les nœuds d’une situation « nouée », qu’on a d’abord ressentie comme plus ou moins profondément embrouillée.

Des difficultés se révèlent, certes, en toute activité humaine concrète. L’activité correspondant à l’exercice d’un métier peut ainsi rencontrer des difficultés qui ne sont pas nécessairement liées au métier et qu’on dira pour cela *contingentes* (par rapport au métier). Mais c’est en ce point que commence… la difficulté que je voudrais souligner. Il apparaît en effet que, parmi les gens de métier et dans la *noosphère* même du métier, d’aucuns se hâtent de jeter par-dessus bord nombre de difficultés effectivement rencontrées par certains dans l’exercice du métier, et cela au motif que ces difficultés n’affecteraient pas le métier proprement dit mais découleraient de conditions contingentes de son exercice. Bien souvent, ainsi, on posera que telle difficulté observée n’est pas véritablement une difficulté *du métier* mais qu’elle est due à la maladresse ou à l’incompétence de la personne observée. Cette propension à « délester » le métier de ses difficultés nourrit ainsi, corrélativement, les suspicions croisées entre gens de métier, en sorte qu’il n’est guère avantageux, dans le métier, de faire connaître que l’on rencontre des difficultés !

Pour échapper aux conséquences fâcheuses de cet habitus dont la prégnance est elle-même une difficulté du métier, le didacticien, qui fait partie de la noosphère du métier dès lors qu’il se le donne pour objet d’étude, doit par méthode regarder toute difficulté observée dans l’exercice du métier de professeur (de ceci ou de cela) comme étant sauf exception *une difficulté du* métier *de professeur* (de ceci ou de cela). Je voudrais illustrer la chose à l’aide de l’un des *Propos d’un Normand* publiés autrefois par le philosophe Alain (Émile-Auguste Chartier, 1868-1951) ; celui-là date du 31 octobre 1912 (Alain, 2011) :

> Le métier d’instituteur est à mes yeux parmi les plus durs. Songez qu’il faut parler haut et clair pendant des heures ; songez que la plus petite marque de fatigue est immédiatement saisie par tout le jeune bataillon, avide de liberté, de jeux et de bruit. Il faut être un peu du métier pour comprendre ces difficultés-là. Les classes sont souvent trop nombreuses ; souvent aussi une partie de ce petit peuple manque de politesse ; les moyens de discipline sont extrêmement faibles ; il faut se faire aimer et se faire craindre en même temps. Cela suppose une tenue et une

---

barre le chemin ; l’*empêchement* oppose une résistance active, et surtout offre l’idée de quelque chose de plus absolu. » Je prendrai ici le mot de difficulté comme englobant ces trois modalités de la gêne à agir, depuis la « simple » difficulté jusqu’à l’empêchement « absolu ».

> surveillance de soi constantes ; et l'on peut, sans aucune exagération, comparer l'instituteur au dompteur, dont l'attention ne peut pas dormir un seul petit moment. Ceux qui jugent des enfants réunis d'après l'enfant isolé, et qui croient que l'homme fait a un ascendant naturel sur soixante gamins, ceux-là ne connaissent pas le métier. (p. 108)

Je souligne en passant que toutes les *conditions* auxquelles Alain fait référence ici, qui engendrent des difficultés dans l'exercice du métier d'instituteur, relèvent pour l'essentiel des niveaux de l'*école* et de la *pédagogie* dans l'échelle de codétermination didactique. On voit que ces conditions, qui sont des *contraintes* pour l'instituteur (c'est-à-dire des conditions qu'il ne peut pas changer), sont datées : nous n'avons plus, en France aujourd'hui, de classes de soixante « gamins », l'instituteur n'a plus à parler durant des heures, etc. Mais Alain nous peint là certaines des difficultés possibles du *métier* d'instituteur tel qu'il se pratiquait il y a un siècle.

Les difficultés précédemment évoquées ne sont en vérité qu'accessoires, ajoute Alain. Il complète alors dans les termes suivants le tableau des difficultés déjà peintes :

> Il faut expliquer sans cesse, c'est-à-dire surveiller en même temps une suite d'idées et d'expressions. Et c'est encore une erreur de croire que la routine puisse s'en mêler. On n'apprend point à parler convenablement sans réfléchir; et en voici une preuve qui sera sensible à tous ceux qui ont occasion de répéter plusieurs fois la même conférence ; on s'aperçoit aisément, dans des occasions de ce genre, que ce qui n'est pas inventé et improvisé sonne mal, et que tout ce qui est récité s'interpose comme un brouillard entre l'orateur et l'auditoire ; sans compter que l'on s'expose à des erreurs de mots ridicules, comme j'ai vu chez des professeurs qui lisaient le même cours depuis plus de dix ans. J'ai souvenir d'un pauvre homme qui lisait des choses sur Pascal, tous les ans les mêmes choses, et qui disait Jean-Jacques Rousseau au lieu de Jésus-Christ. Il était méprisé ; à l'école primaire, on l'aurait sifflé. (p. 109)

Nous touchons ici au didactique *stricto sensu*, en cela que l'auteur évoque des contraintes imposées par l'*œuvre* étudiée elle-même. Cela noté, on peut croire qu'Alain attribue à des variations contingentes – liées par exemple à la personne de l'instituteur – les difficultés mentionnées. Or c'est bien du *métier* qu'il s'agit : s'il adopte telle technique didactique, dit Alain, l'instituteur français de 1912 est presque sûr de s'embrouiller, de commettre un *lapsus linguae* ridicule ou, du moins, de lasser son auditoire par un discours devenu trop familier parce que souvent ressassé, alors même que, « préparant son cours », l'instituteur devrait avoir pour but de se préparer à *improviser* le cours à donner. Par delà le détail de l'affaire, Alain nous parle ainsi, non pas tant du *fonctionnement* praxéologique de tel ou tel instituteur, mais bien de l'*équipement* praxéologique adéquat du *métier* d'instituteur : la personne observée est ici comme toujours un révélateur d'une *difficulté du métier*.

Des difficultés du métier aux problèmes de la profession

Une difficulté ayant été reconnue par une personne ou une institution ξ, elle peut se transmuer, pour une personne ou une institution ξ^*, en une *question* à laquelle il convient d'apporter *réponse*. Bien entendu, on peut avoir $\xi^* = \xi$. Le grand problème que je voudrais évoquer dans ce qui suit est celui-ci : comment une difficulté reconnue par ξ donne-t-elle naissance à un couple question-réponse potentiel (Q, R) pour ξ^* ? Il s'agit là d'une question qui se pose au moins au didacticien, auquel bien d'autres questions se posent encore, par exemple quant à la nature de ξ et ξ^* et quant à la valeur de la réponse R donnée à la question Q. Avant de progresser dans l'examen de ces questions, il convient de préciser notre point de départ. Nombre de difficultés du métier, je l'ai suggéré, ne sont pas reconnues par qui que ce soit, ou ne le sont que très fugitivement. Mais parmi les difficultés effectivement reconnues, bien peu « font question » hors du cercle restreint de gens de métier isolés chacun dans sa pratique personnelle, que la culture traditionnelle du métier portent à croire qu'ils doivent répondre *par eux-mêmes*, sans autre secours que leur « inventivité », leur « talent », etc., aux questions que l'exercice du métier leur fait rencontrer. Tout se passe comme si le professeur vivait son métier en travailleur indépendant, ce personnage qu'on nomme en anglais *freelancer* ou *freelance*. Pour décrire la chose, j'ai autrefois qualifié le professeur typique de « petit producteur indépendant », qui de ce fait ne devrait rien à personne, pour cette raison déjà qu'il est (ou se croit) abandonné de tous. Par contraste, je voudrais souligner que, pour qui exerce le métier de médecin, une telle conception de son métier est impossible : confronté à cette difficulté qu'est le soin à donner à un patient souffrant de telle pathologie nouvelle, le médecin de ville sait devoir compter sur une « noosphère » très puissante, qui seule pourra lui apporter l'équipement praxéologique nécessaire (pour ce qui est du diagnostic, de la thérapeutique, etc.).

La reconnaissance qu'une difficulté affecte l'exercice du métier, sa transmutation en une question Q, la construction d'une réponse R et le contrôle de la validité et de la valeur de cette réponse relèvent par définition de la *noosphère du métier*. Or la noosphère d'un métier est souvent un immense capharnaüm, juxtaposition non organisée et peu intégrée de personnes et d'institutions, où, en outre, les jeux de pouvoir vont bon train. Dans la noosphère du métier de professeur de mathématiques (qui semble n'avoir pas, à cet égard, d'originalité), on trouve ainsi non seulement les professeurs eux-mêmes dès lors qu'ils tentent d'apporter réponse à une question donnée et la font connaître, mais aussi les différents corps d'inspection concernés ainsi qu'une foule de groupes de pouvoir prétendant influer sur l'évolution du métier, parfois en jouant aux conseillers du Prince, avec au sommet quelques gourous ou évergètes, qui, en ce qui nous concerne, excipent fréquemment du titre de mathématicien patenté, et qui se veulent donc les bienfaiteurs des professeurs (le grec εὐεργετέω, d'où vient « évergète », signifie « je fais du bien »). Quand ils ne se fondent pas dans l'un des groupes précédents, il faut ajouter à cette galerie de personnages les chercheurs en didactique des mathématiques travaillant d'une manière ou d'une autre sur le métier de professeur. Cela dit, ce qu'il faut constater alors, c'est que la noosphère traditionnelle se révèle largement impuissante, à travers la multitude des instances qui s'y logent, à identifier les difficultés du métier et à apporter aux questions qui en découlent des réponses appropriées.

C'est en ce point qu'il me faut introduire la notion de *problème*, telle qu'elle s'emploie en TAD. On dit d'une question Q qu'elle a le statut de *problème* pour une instance (personne ou institution) si celle-ci se reconnaît impliquée dans le processus de construction d'une réponse à la question Q. L'étymologie de *problème* (προβάλλω désigne l'action de « jeter devant ») rappelle la situation où une question est lancée (*ballein*) devant (*pro*) une instance (une assemblée, etc.), pour que celle-ci lui cherche une réponse, pour que, en fin de compte, l'énigme proposée soit résolue. Je note sans m'y attarder que cette transmutation d'une question lancée par une instance ξ devant une instance ξ^* suppose en règle générale une certaine transposition de la question, qui deviendra ainsi un *problème de mathématiques*, c'est-à-dire un problème pour la communauté des mathématiciens ou pour telle de ses parties au moins, ou encore un problème de biologie, ou d'histoire, voire de philosophie, etc. Le fait que la question Q lancée par ξ devant ξ^* devienne effectivement un problème pour ξ^* peut être décrit, ainsi que cela se fait dans le cadre plus spécial d'une classe scolaire (où le professeur lance une question à des élèves pour qui elle doit devenir un *problème*) en parlant de *dévolution* par ξ de Q à ξ^*. Le problème (de didactique) qui nous occupe ici peut donc maintenant s'énoncer ainsi : quelles difficultés du métier deviennent – ou ne deviennent pas – des problèmes pour la noosphère du métier ? Et pourquoi cela ? Quelle validité et quelle valeur ont les solutions éventuellement apportées à ces problèmes ?

Professions et semi-professions

La réponse à ces questions dépend en grande partie de l'état d'organisation de la noosphère du métier, comme le montre par contraste l'exemple de la médecine[2]. C'est ici que s'introduit

[2] Il existe, dans la noosphère du métier de professeur, une certaine résistance, prompte à se faire connaître de façon parfois bruyante, à l'idée même de rapprocher l'analyse du système d'*instruction publique* de celle du

alors la notion de *profession* ainsi que celle de *degré de professionnalisation* de la noosphère du métier – je parlerai pour faire court de « professionnalisation du métier ». La noosphère d'un métier est une profession si elle satisfait un certain nombre de critères dont des listes diverses ont pu être dressées de manière convergente. J'en donne en annexe, en une traduction française au fil de la plume, une liste de 12 critères qui ont pu être proposés à cet égard (Howsam et al, 1985 ; voir aussi l'article "Profession" de l'encyclopédie *Wikipedia* en langue anglaise). Je ne retiendrai ici qu'un petit nombre de points. Une profession – telle celle de médecin – « possède un corpus propre de connaissances et de savoir-faire », « repose sur des disciplines fondamentales dont elle tire son corpus de connaissances et de savoir-faire » et, en conséquence, « suppose une formation de longue durée, généralement à l'université ». En outre, « la profession détermine elle-même les compétences attendues de ses membres ». En particulier, « le praticien est relativement libre vis-à-vis de tout contrôle direct ou public de son activité » et accepte de rendre compte « à la société à travers la profession à laquelle il appartient ». J'ajoute qu'une profession a la charge d'identifier les difficultés du métier et de travailler, à travers des organes spécialisés – dont la *recherche* constitue un rouage essentiel – à apporter réponse aux questions qui se posent dans l'exercice du métier : si l'on pense à la médecine notamment, on voit que, lorsqu'elle est organisée en profession, la noosphère d'un métier dépasse de beaucoup le métier *stricto sensu*.

Que peut être la noosphère d'un métier qui ne répond pas aux critères des professions ? J'ai parlé de degré de professionnalisation d'un métier. Un modèle très simple a été proposé à cet égard : hormis les professions, il contient ce qu'on est convenu d'appeler les *semi-professions*. Parmi les critères des semi-professions (voir l'annexe 1), retenons l'existence de « périodes de formation plus courte », d'un « corpus de connaissances et de savoir-faire moins spécialisé et moins hautement développé », d'une « insistance nettement moindre sur les bases théoriques et conceptuelles de la pratique ». Retenons aussi « une tendance chez l'individu à s'identifier à l'institution qui l'emploie plutôt qu'à la profession

---

système de *santé publique*, chacun de ces systèmes étant déclaré alors « incomparable » (sur le thème de l'incomparable, voir Detienne, 2000). La vivacité des réactions suscitées chez certains par le rapprochement indiqué ici semble être le symptôme d'une angoisse indépassée devant la perspective du renoncement à l'empire imaginaire que s'attribue l'enseignant « petit producteur indépendant » qui ne veut dépendre que de lui-même et n'entend répondre que devant lui-même. Par contraste, tout médecin est tenu par l'*obligation de moyens* telle que la définit la profession, obligation dont le contenu évolue avec les progrès de la recherche médicale ; il ne peut donc pas fantasmer qu'il fait « ce qu'il veut », « ce qu'il croit bon », etc. Le symptôme, en cela, *ne se trompe pas*, si l'on peut dire : en matière d'instruction publique, le passage de l'état de choses actuel au régime de profession se traduira nécessairement par le renoncement, forcé ou non, à des satisfactions narcissiques qui apparaissent aujourd'hui comme l'un des bénéfices secondaires de la stase historique du métier de professeur.

elle-même », « une moindre autonomie dans la prise de décision professionnelle et une responsabilité devant les supérieurs plutôt que devant la profession », « une gestion par des personnes qui ont été elles-mêmes formées à cette semi-profession et l'ont pratiquée ». Paru en 1969, le livre qui a ponctué les travaux sur ce que j'ai appelé le degré de professionnalisation d'un métier a été dirigé par le sociologue américain Amitai Etzioni et s'intitule *The Semi-Professions and Their Organization*. Son sous-titre est pour nous éclairant : *Teachers, Nurses, Social Workers* – « Enseignants, infirmières, travailleurs sociaux ». La noosphère du métier de professeur (de mathématiques, etc.) est organisée jusqu'ici, globalement, en *semi-profession*. J'ajoute, pour éviter certains malentendus, que les « enseignants-chercheurs » des universités françaises exercent, eux, un double métier : en tant qu'enseignants, ils relèvent, à l'instar de leurs collègues du primaire et du secondaire, d'une semi-profession ; en tant que chercheurs, ils participent (jusqu'ici) de professions typiques – notamment par leur niveau de formation et leur autonomie « intellectuelle » face aux différents pouvoirs. Ajoutons que, bien entendu, il est des métiers, des « petits métiers », dont le degré de professionnalisation est inférieur, voire très inférieur à celui des semi-professions : Etzioni a créé ainsi le terme de *McJob* (en référence aux restaurants McDonald's) pour désigner, précise l'article éponyme de *Wikipedia*, des emplois "where little training is required, staff turnover is high, and workers' activities are tightly regulated by managers".

L'expression « problèmes de la profession » appelle plusieurs remarques. Tout d'abord, elle nomme le tout – « la profession » – pour désigner une de ses parties, la profession de professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire, de la même façon que par « professeur » on entend ici un professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire. Selon le *Dictionnaire culturel en langue française* (Rey, 2005), le latin *professor* désignait « celui qui se déclare expert en un art ou une science » ; le verbe *professer* s'est employé depuis le XVII^e^ siècle au sens d'*exercer un métier,* sens que l'on trouve encore dans le dictionnaire d'Émile Littré (qui offre cette définition : « Exercer. Professer un art, un métier »). Cela noté, parler de « problème de la profession » comporte une ambiguïté délibérée : un tel problème est une question ayant pris statut de problème pour une institution que je désigne ici, en anticipation historique, comme étant une profession, au sens fort du terme, alors qu'elle n'est au mieux, aujourd'hui, qu'une semi-profession, qui plus est soumise spécieusement à des forces politiques visant en fait sa déprofessionnalisation. Mais derrière ce raccourci lexical, il faut entendre l'idée suivante : c'est en assumant les difficultés du métier de professeur comme étant des *problèmes*, dont la résolution appelle des recherches fondamentales et appliquées appropriées, que la noosphère du métier de professeur pourra donner naissance à une profession véritable. Nous en sommes loin aujourd'hui. C'est ainsi, on le sait, que ceux qui prétendent présider aux destinées du métier ne sont guère enclins – c'est là une litote – à recourir à ce que la recherche en didactique, notamment, pourrait apporter au métier, sinon à eux-mêmes.

2. Problèmes classiques de la profession : exemples mathématiques

Le métier en questions

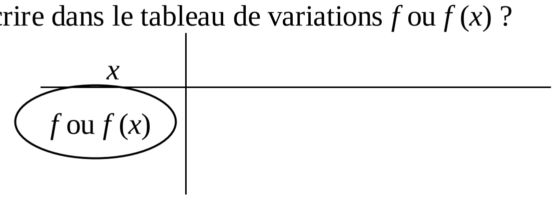
La formation des professeurs de mathématiques créée à Marseille comportait (et comporte encore) un dispositif dit *Forum des questions* : chaque semaine de formation, les élèves professeurs de 1^{re} et de 2^{e} années y ont été invités à consigner par écrit une difficulté rencontrée dans leur formation ; chaque semaine, la liste de ces « questions » a été communiquée à l'ensemble de la promotion concernée ; chaque semaine, quelques-unes de ces questions ont fait l'objet d'un rubrique du séminaire de formation des élèves professeurs consacrée à présenter des « matériaux pour une réponse ». Il s'agit là d'un dispositif parmi d'autres possibles, qui permet de repérer un grand nombre de difficultés du métier, même si, vraisemblablement, il laisse échapper certains types de questions. Voici par exemple une suite de sept questions posées par un professeur stagiaire, élève de 2^{e} année en 2008-2009 à l'IUFM Midi-Pyrénées, ayant en charge notamment une classe de 2^{de} :

❶ Pour le cours d'aide de 2^{de}, peut-on prendre toute la classe en organisant les élèves forts qui aident les élèves faibles par exemple ?

❷ Peut-on définir, voire travailler, sur une séance de module ? (Mon équipe pédagogique au lycée n'a pas pu définir exactement le cours de Module.)

❸ Que doit-on faire quand certains élèves commencent à accumuler de mauvais résultats ? Alerter les parents ? Alerter le professeur principal ? … ?

❹ Doit-on écrire dans le tableau de variations f ou $f(x)$?



❺ Peut-on donner un test aux élèves en cours d'aide ?

❻ On va bientôt avoir une démonstration sur le tableau blanc interactif. Mais on a déjà des vidéoprojecteurs. Y a-t-il un avantage avec le TBI que l'on n'a pas avec le vidéoprojecteur ?

❼ En fin d'année, quand nous avons des élèves à 4 de moyenne et d'autres à 7 de moyenne, lesquels devons-nous favoriser pour l'aide de maths ? Sachant qu'un élève à 4 va gagner peut-

> être deux points et que cela ne va pas changer beaucoup dans son passage alors que l'élève qui a 7/20, gagner 2 points c'est important.

Ce très petit échantillon suffit, je crois, à suggérer la variété des difficultés que recèle le *métier* de professeur (de mathématiques). Bien que j'aie annoncé plus haut que, en bonne méthode, les difficultés observées doivent *toutes* être rapportées au métier, ainsi que je viens de le faire, je ferai une remarque qui doit brûler les lèvres de certains : l'auteur de ces questions est un professeur *débutant* ; un professeur aguerri poserait-il de telles questions ? Réponse : sans doute pas ; mais cela pour une assez mauvaise raison : dans la mesure en effet où ils ne disposent pas − fût-ce pour la contester ou s'efforcer de l'affiner − d'une réponse *de la profession*, les professeurs « fabriquent » bon gré mal gré leurs propres réponses, auxquelles ils se tiennent ensuite généralement. En un tel cas, qui est le cas majoritaire, la question qui s'élève devant le professeur reçoit de lui une réponse dont il doit se contenter sans que ladite question devienne jamais un *problème de la profession*.

Des matériaux pour une réponse et leur improbable devenir

Je voudrais maintenant illustrer ce que peut être, dans le cadre de formation évoqué, le travail de la profession – accompli ici par des formateurs – pour s'avancer vers une réponse. Pour cela, je reproduis les « matériaux pour une réponse » proposés à une question toute semblable à la question 4 ci-dessus dans le séminaire de formation tenu à l'IUFM d'Aix-Marseille en 2006-2007 (Chevallard, 2007c, pp. 267-268) :

> La seconde question concerne un choix de notation : doit-on, dans un tableau de variations, écrire $f(x)$ ou f, tout court ? La réponse à cette question se nourrit de deux ordres de considérations. À l'oral, on dira par exemple que « lorsque x augmente entre –10 et –5, $f(x)$ augmente ». Ici, c'est bien la valeur variable $f(x)$ qui augmente : la fonction f, elle, *n'augmente pas !* Cela justifie que l'on écrive $f(x)$ dans la seconde ligne du tableau de variations, du moins si on lit le tableau (voir ci-après) comme on vient de le faire – en disant par exemple que, « lorsque x augmente (ou croît) entre –10 et –5, $f(x)$ diminue (ou décroît) ».

x	–10		–5		4
$f(x)$	2	↗	21	↘	12

> Bien entendu, on pourra lire aussi ce tableau en disant que « sur l'intervalle [–10 ; –5], la fonction f est croissante », etc. Cela justifiera alors qu'on écrive f, et non pas $f(x)$, dans la

seconde ligne du tableau. Mais il y a là une difficulté dont il faut être bien conscient. Dire que « lorsque x augmente entre –10 et –5, $f(x)$ augmente » ne suppose pas encore le *concept* de fonction, mais seulement, si l'on peut dire, celui de « lien fonctionnel » (entre x et $y = f(x)$) qui, à une valeur x, associe une valeur $f(x)$, sans qu'on puisse encore attribuer de propriétés à cette « association ». C'est ainsi que, au collège, à un nombre $x \geq 0$ est associée sa racine carrée $\sqrt{x}$, sans qu'on dise rien encore sur la *fonction* « racine carrée » : ce n'est que plus tard qu'on verra qu'on peut définir une telle fonction de façon à ce qu'elle soit continue, dérivable, etc. (La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ si la troisième décimale dans le développement propre de x est paire, $= -\sqrt{x}$ sinon, vérifie par exemple $f(5) = \sqrt{5}$, mais $\lim\limits_{x \to 5_-} f(x) = -\sqrt{5}$: elle n'est donc pas continue ; et il est facile de voir qu'elle n'est ni croissante, puisqu'on a par exemple $f(1{,}234) > f(1{,}235)$, ni décroissante, puisque par exemple $f(1{,}234) < f(1{,}236)$.) De la même façon, on associait autrefois à un nombre $x > 0$ son logarithme (décimal), $\log x$: chaque réel strictement positif avait ainsi *son* (nombre) logarithme, sans que soit considérée pour autant une *fonction* « logarithme » ! Bien entendu, ce qui doit advenir au lycée, c'est bien *ce concept de fonction*, qui fait des simples « associations » évoquées jusqu'ici *des entités mathématiques de plein droit*, jouissant (ou non) de certaines propriétés, croissance, continuité, dérivabilité, convexité, etc. Mais c'est là pour le professeur un problème didactique qu'il ne peut espérer résoudre par magie en substituant f à $f(x)$ avec un joli mouvement du menton pour signifier que cela seul est rigoureux. On a vu plus haut, au reste, une mise en garde du document d'accompagnement du programme de 2^{de} qui rejoint cette remarque essentielle ; on la reproduit à nouveau : « Quant à la compréhension de la notation f, c'est un objectif à plus long terme : il est approché en seconde par l'accumulation d'exemples nombreux et variés, par l'étude des variations d'une fonction (avec la prise en compte de tout un ensemble de valeurs) et par l'étude des premières fonctions de référence. »

De tels « matériaux » ne constituent, dans un cadre indiqué, qu'une proposition de contribution à l'élaboration continuée d'une *réponse de la profession*. À cet égard, il faut souligner plusieurs manques solidaires dans la structuration « professionnelle » du métier de professeur telle qu'elle se donne à voir aujourd'hui. Tout d'abord la profession ne dispose pas d'un dispositif tant soit peu intégré d'observation des difficultés du métier ; et il doit être clair que des « forums des questions » analogues à ceux évoqués ci-dessus ne sauraient constituer qu'une *partie* d'un tel système. Ensuite, elle ne dispose pas de moyens systématiques de recherche et de validation de solutions aux problèmes qui se posent à elle – ce qui inclurait certainement l'identification, l'inventaire et l'analyse des solutions élaborées localement par des membres de la profession – comme dans l'exemple précédent, relatif à la notation $f(x)$. Enfin, elle ne dispose pas d'un organisme de diffusion contrôlée des réponses regardées, à un moment donné, comme « admissibles » – soit une « archi-école “normale” » (Chevallard & Cirade, 2009) située en amont des écoles universitaires formant les professeurs. Pour tout cela, nombre de difficultés du métier de professeur restent ignorées de la profession, au motif toujours renaissant qu'il reviendrait à chaque « professionnel » de s'en débrouiller. Surtout, un plus grand nombre peut-être de difficultés pourtant connues et reconnues ne font pas l'objet, de la part de la profession, d'indications ayant été précisément vérifiées. Si beaucoup de difficultés du métier donnent lieu à une problématisation individuelle, celle-ci conduit au fil du temps, en règle générale, à une réponse personnelle « routinisée » au point qu'elle en paraît bientôt naturelle à qui la fait sienne. Par contraste, la professionnalisation du métier de professeur suppose une *reproblématisation générale et continuée de l'ensemble des gestes et des situations du métier*. Dans cette voie, on comprendra que nous ne fassions ici, comme dans les séances de travail dirigé qu'accompagne ce cours, que quelques pas seulement, à des fins d'illustration. Je commencerai, en l'espèce, en m'arrêtant sur des exemples touchant la discipline enseignée – les mathématiques.

Infrastructures mathématiques : un exemple

Comme tout autre métier, le métier de professeur suppose des *infrastructures*, sans lesquelles les gens de métier ne pourraient développer leurs activités propres, qui consistent à faire étudier à leurs élèves certaines *œuvres*. S'agissant des professeurs de mathématiques, certaines des infrastructures les plus essentielles à leur ministère sont évidemment des infrastructures *mathématiques*. Il est clair, ainsi, que faire étudier les usages des nombres complexes en géométrie plane suppose la création historique, étalée sur plusieurs siècles, desdits nombres complexes, qui constituent l'infrastructure mathématique indispensable (voir ainsi Borel & Deltheil, 1947). Les infrastructures mathématiques sont, en règle générale, construites hors du métier *stricto sensu* – les créer n'est pas un « geste du métier » –, comme l'a illustré superlativement, il y a presque un demi-siècle, la réforme dite des « mathématiques modernes », qui a rejeté violemment, pour les renouveler presque totalement, les infrastructures mathématiques traditionnelles, rebaptisées « classiques » pour l'occasion. De telles infrastructures sont empruntées ordinairement à la communauté des mathématiciens, à la « sphère savante », qui ne les a pas créées nécessairement pour l'usage que les professeurs en feront (c'est là en partie le thème de la transposition didactique) et qui souvent ignore ce qu'il adviendra d'elles. Cette situation, où la semi-profession des professeurs se révèle dominée (mathématiquement, s'entend), et ne sait pas toujours faire reconnaître et défendre ses intérêts les plus légitimes, a fréquemment des effets fâcheux, parce que les infrastructures adoptées, la plupart du temps allogènes, ne sont pas réellement appropriées aux besoins du métier. Le relatif interdit sur la création ou même l'aménagement non clandestin des infrastructures mathématiques utiles au métier renvoie à l'un des grands problèmes de la profession : celui du « choix », non seulement des *œuvres à faire étudier*, mais aussi des infrastructures adéquates. Face à ce problème, la profession est aujourd'hui relativement démunie : contrairement à la communauté des mathématiciens, elle ne dispose pas des infrastructures − mathématiques et autres − utiles à la création d'infrastructures mathématiques adaptées. Il en résulte en particulier que je ne m'arrêterai dans ce cours que sur quelques « détails » infrastructurels, sans prétendre me situer au niveau des grandes infrastructures dont, par exemple, la réforme des mathématiques modernes s'est nourrie, non sans voracité, en son temps.

Je voudrais m'arrêter ici sur un exemple qui n'est guère différent de ceux déjà parcourus, mais dont le mérite est de recouper plusieurs aspects du grand problème qui nous occupe : *la problématisation professionnelle* – ou plutôt « professionnalisatrice » – *du métier de professeur*. Voici une question exposée par écrit, le mardi 27 mars 2007, par un professeur agrégé stagiaire de l'IUFM d'Aix-Marseille ayant la responsabilité, en mathématiques, d'une classe de 2de et qui dit voir buté sur la réponse à donner, dans cette classe, à la question Q suivante : étant donné deux nombres entiers strictement positifs a et b, comment déterminer si le nombre fractionnaire a/b est un décimal (c'est-à-dire si la division de a par b « tombe juste ») ou non ? Il explicite alors ainsi la difficulté – objective – qu'il a rencontrée :

> Pour cela, je ne vois comme technique (décrite sommairement) que 1) décomposer a et b en facteurs premiers, 2) réduire la fraction a/b, 3) regarder le dénominateur de la fraction réduite : si des facteurs premiers différents de 2 et 5 apparaissent, alors la fraction a/b n'est pas le représentant d'un décimal. Une autre technique pourrait consister à regarder le développement décimal à la calculatrice et voir si ce développement est périodique ou non. Problème : on se heurte aux problèmes d'affichage de la calculatrice. Y a-t-il une autre technique envisageable ?

Que se passe-t-il là ? Cet élève professeur de 2^{e} année dit connaître une réponse qui est en fait la réponse apportée par l'infrastructure mathématique *traditionnelle*, dont la disponibilité a d'ailleurs quelque peu varié au fil de l'histoire récente du l'enseignement secondaire français des mathématiques. Quoiqu'avec des éclipses, en effet, l'équipement mathématique du professeur du secondaire a longtemps comporté le résultat rappelé par le jeune professeur, ainsi d'ailleurs que celui relatif à la longueur de la partie *apériodique* du développement d'un rationnel non décimal, en donnant par contraste au résultat analogue concernant la *période* de ce développement un statut plus incertain. À titre d'exemple, voici ce que l'*Arithmétique du brevet élémentaire avec compléments pour le brevet supérieur* publiée en 1928 chez Hatier par A. Marijon, inspecteur général de l'Instruction publique, et A. Pequignot, directeur de l'école primaire supérieure de Toulouse laisse voir (dans les compléments) de l'infrastructure mathématique alors disponible (comme il était classique alors, les auteurs utilisent la notion de fraction irréductible génératrice d'un développement décimal) :

> ***1° La fraction irréductible génératrice d'un nombre décimal périodique simple a un dénominateur premier avec 2 et 5.***
> ***2° La fraction irréductible génératrice d'un nombre décimal périodique mixte a pour dénominateur un nombre qui renferme l'un au moins des facteurs 2 et 5. L'exposant de celui de ces deux facteurs qui y entre à la puissance la plus élevée est égal au nombre des chiffres irréguliers.***
> Les réciproques de ces propositions sont vraies :
> *Si le dénominateur d'une fraction irréductible est premier avec 2 et 5*, cette fraction ne peut donner naissance ni à un nombre décimal limité, ni à un nombre décimal périodique mixte. *Elle engendre donc un nombre décimal périodique simple*.
> *Si une fraction irréductible a en dénominateur les facteurs premiers 2 et 5, avec d'autres facteurs premiers,* elle ne peut donner naissance ni à un nombre décimal limité, ni à un nombre décimal périodique simple.
> *Elle engendre donc un nombre décimal périodique mixte.*
> Le nombre des chiffres irréguliers est donné, comme nous l'avons dit plus haut, par la plus haute puissance de 2 et 5 en dénominateur.
> Exemples : $\frac{8}{60} = \frac{2}{15} = \frac{2}{3 \times 5}$ donne un nombre décimal périodique mixte, avec 1 chiffre irrégulier. $-\frac{62}{54} = \frac{31}{27}$ donne un développement périodique simple.
>
> REMARQUE. − Le nombre des chiffres de la période est plus difficile à prévoir que celui des chiffres de la partie irrégulière. Nous donnons, dans les exercices 94 et suivants, quelques indications à ce sujet. (p. 405)

Les exercices donnant des indications sur la longueur de la période (lorsque la partie apériodique est de longueur nulle) sont les suivants :

94. – Démontrer que si une fraction irréductible donne naissance à un nombre décimal périodique simple dont la période a 1 seul chiffre, son dénominateur est 3 ou 9.

95. – Démontrer que si une fraction irréductible donne naissance .à un nombre périodique simple dont la période a 2 chiffres, son dénominateur est l'un des nombres 11, 33, 99.

Quels sont les dénominateurs caractéristiques, dans les mêmes conditions, des périodes simples de 3 chiffres ?

96. – Démontrer que si un nombre N est premier avec 2 et 5 il existe un nombre n tel que $10^n - 1$ soit divisible par N.

Le plus petit nombre n vérifiant cette condition est le nombre des chiffres de la période décimale des fractions de dénominateur N.

Chercher n pour N = 7, N = 7 × 3^3, et pour N = 13, N = 13 × l1 × 7.

97. – En considérant un nombre décimal limité comme un nombre périodique mixte dont la période est formée de zéros, donner un énoncé général exprimant le nombre des chiffres irréguliers (ou décimaux) du nombre décimal engendré par une fraction irréductible dont le dénominateur contient 2 ou 5.

L'infrastructure mathématique aujourd'hui disponible se révèle en fait *inadaptée* aux besoins des classes dans la mesure où un changement infrastructurel fort, que les professeurs ont en général tenté jusqu'ici de juguler, s'impose dans les faits : l'usage des calculatrices. Ce bouleversement appelle une *mise à jour* des infrastructures mathématiques. Voici une partie des « matériaux pour une réponse » proposés s'agissant de la question relative au caractère décimal éventuel de la fraction $\frac{a}{b}$, où a, $b \in \mathbb{N}^*$ (Chevallard, 2007c, p. 552) :

c) Par définition, un nombre décimal positif est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{c}{10^n}$ avec c, $n \in \mathbb{N}$. Étant donné alors une fraction d'entiers positifs $\frac{a}{b}$, déterminer si sa valeur est décimale revient à chercher s'il existe des entiers c, $n \in \mathbb{N}$ tels que l'on ait $\frac{c}{10^n} = \frac{a}{b}$.

1. On peut rechercher s'il existe n tel que $\frac{a}{b} \times 10^n$ soit entier. Soit N le premier entier tel que $2^N \geq b$. Alors, s'il existe un entier n satisfaisant la condition indiquée, cela se produit pour un entier $n \leq N$. On recherche donc n parmi les entiers de 0 à N. Par exemple, pour $\frac{273}{364}$, il suffit de chercher pour $n \leq 9$ (puisque $2^9 = 512$). En fait, comme $\frac{273}{364} = 0,75$, on peut conclure. Prenons maintenant $\frac{231}{364}$; on a cette fois : $\frac{231}{364} =_c 0,6346153846153846153846153846153 8$. Comme, ici, on a encore $N = 9$, on peut aussi conclure : $\frac{231}{364}$ n'est pas décimal. Considérons maintenant

$$\frac{8090493753537}{14421875} =_c 560987{,}649216.$$

Ici, on a $N = 24$; si le résultat de la calculatrice est exact (et non pas seulement approché), l'affaire est donc faite ! Pour vérifier, on peut calculer plus de décimales éventuelles : l'utilisation de calculatrices plus puissantes (en ligne et gratuites…) montre en fait que le quotient donné est *exact*. On peut ainsi conclure.

Explicitons sur un exemple encore la technique vers laquelle pointe ce fragment de réponse (Chevallard & Cirade, 2009). Considérons la division de 117 par 56 : tombe-t-elle juste ? S'il en était ainsi, puisque $2^6 = 64 \geq 56$, la division s'arrêterait *au plus tard* à la 6^e décimale. Or une calculatrice donne par exemple : $117 \div 56 = 2{,}08928571428\ldots$ La conclusion suit.

Dans ce cours, je considérerai, à titre d'expérience de pensée, qu'il revient à la *profession* de mettre à la disposition des gens de métier les éléments infrastructurels mathématiques du type de celui évoqué ici : c'est la profession qui doit repérer le problème (que le professeur ne fait que rencontrer au chevet de sa classe), qui doit lui chercher – éventuellement en diligentant des recherches en bonne et due forme – une solution « admissible », qui doit faire reconnaître cette solution des instances de tutelle – lesquelles sont aujourd'hui encore celles d'une semi-profession – et qui doit la faire connaître aux gens de métier proprement dit – lesquels, dans une profession digne de ce nom, ne sauraient être abandonnés devant des difficultés qu'ils ne peuvent manquer de rencontrer.

3. Le paradigme de la visite des œuvres et ses problèmes

Le professeur et la structuration du champ praxéologique à enseigner

Les problèmes de la profession ne se limitent pas aux difficultés que les gens de métier peuvent éprouver au chevet des classes. Certains problèmes ne peuvent guère être posés qu'avec le recul que procurent certaines des positions existant – ou à créer – au sein de la noosphère, c'est-à-dire au sein de la *proto-profession* de professeur. Chaque position comporte des angles morts, et il n'en va pas autrement de la position de professeur. Pour faire entendre plus précisément la chose, je dois compléter ici l'échelle de codétermination didactique présentée plus haut. Dans le *paradigme de l'étude scolaire* aujourd'hui dominant, que nous appellerons le *paradigme de la visite des œuvres*, ce qui est désigné sous le nom d'*œuvre* relève *a priori* d'un certain *champ praxéologique* redéfini par l'école au sein de laquelle cette œuvre se trouve étudiée. Dans cette redéfinition, le champ praxéologique reçoit une certaine organisation que l'on peut en règle générale identifier à un système à plusieurs niveaux. Au niveau supérieur se trouve ce qu'on nomme par synecdoque la *discipline* – mot qui désigne alors l'ensemble du champ praxéologique à faire étudier (ce peut être « les mathématiques », « la géographie », « la littérature », etc.). Ce « territoire disciplinaire » se scinde ensuite en *domaines*, eux-mêmes divisés en *secteurs*, qui se décomposent en *thèmes*, à leur tour fragmentés en *sujets*. Dans l'exemple des développements décimaux des nombres rationnels, les écoles que, en 1928 et pour un certain temps encore, on désigne sous le nom de *cours complémentaires* et d'*écoles primaires supérieures*, offrent un découpage des mathématiques où le domaine est l'*arithmétique* [Marijon & Pequignot, 1928, *passim*], le *secteur* est celui des fractions « ordinaires » et « décimales » [p. 176], le *thème* « les fractions génératrices des nombres décimaux périodiques », « simples » ou « mixtes » [p. 399], le *sujet* étant le type de tâches (incomplètement étudié) que, en des termes un peu plus modernes, on peut énoncer ainsi [3] : « Reconnaître si une fraction d'entiers a/b a un développement décimal *limité* ou *illimité* et déterminer la longueur de sa partie apériodique ainsi que celle de sa partie périodique » (p. 399). Formellement, on peut réécrire comme ci-après l'échelle ainsi « complétée » :

$$\begin{array}{c}
\text{Société} \\
\downarrow\uparrow \\
\text{Paradigme de la visite des œuvres} \\
\downarrow\uparrow \\
\text{École} \\
\downarrow\uparrow \\
\text{Pédagogie} \\
\downarrow\uparrow \\
\text{Discipline} \leftrightarrows \text{Domaine} \leftrightarrows \text{Secteur} \leftrightarrows \text{Thème} \leftrightarrows \text{Sujet} \\
\downarrow\uparrow \\
\text{Œuvre}
\end{array}$$

[3] Le cas des « fractions décimales » est inclus dans le cas général par l'exercice 97 reproduit plus haut : si le dénominateur ne contient que des 2 et des 5, la partie apériodique (« irrégulière ») du développement décimal a pour longueur le plus élevé des exposants des facteurs 2 et 5 figurant dans le dénominateur (la partie périodique, elle, est formée de zéros et a pour longueur 1). La fraction $\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3}$ a ainsi un développement décimal *limité* de longueur 3 ; de fait on a $17 \div 8 = 2{,}125$. On a par ailleurs $\frac{119}{56} \times 10^6 = 2125000$, en sorte que $\frac{119}{56} = 2{,}125$, ce que confirme l'observation que $\frac{119}{56} = \frac{7 \times 17}{7 \times 8} = \frac{17}{8}$. On notera que, appliqué à une « fraction décimale », le résultat relatif à la longueur de la partie « irrégulière » permet de savoir quand s'arrêtera le quotient. Ainsi la division de 7 par 16 s'arrêtera-t-elle au 4e rang (puisque $16 = 2^4$) ; on a en fait : $7 \div 16 = 0{,}4375$.

Dans ce paradigme – que je noterai en abrégé PVO –, le professeur intervient ès-qualités aux niveaux du thème et du sujet, en délaissant ce qui, des niveaux supérieurs (secteurs, domaines, etc.), ne se décline pas aux niveaux inférieurs (thèmes, sujets). Dans l'exemple que nous avons suivi, le sous-secteur des fractions décimales est ainsi scindé, dans l'ouvrage consulté, en deux thèmes : « les nombres décimaux écrits comme fractions décimales » et « opérations sur les fractions décimales », eux-mêmes scindés en un petit nombre de sujets (« lecture des fractions décimales » et « transformation d'un nombre décimal en fraction décimale et inversement » pour ce qui est du premier thème, addition et multiplication des fractions décimales pour ce qui est du deuxième thème). S'il peut donc buter sur un sujet ou sur un thème, ainsi qu'il en va dans la question portant sur la reconnaissance de la décimalité d'une fraction d'entiers, le professeur n'est pas, en tant que tel, conduit à rencontrer comme problématiques en eux-mêmes des secteurs ou des domaines entiers. Bien entendu, il peut le faire, mais alors en tant que membre d'une noosphère en voie de professionnalisation, c'est-à-dire en tant que *professionnel* (ou proto-professionnel), et pas seulement en tant qu'homme ou femme de métier.

La profession et l'aggiornamento du champ praxéologique à enseigner

Dans un cours donné à l'école d'été précédente (Chevallard, sous presse), j'ai insisté sur la problématique dite *primordiale*, que j'avais alors énoncée ainsi :

> Étant donné un projet d'activité dans lequel telle institution ou telle personne envisage de s'engager, quel est, pour cette institution ou cette personne, l'équipement praxéologique qui peut être jugé indispensable ou simplement utile dans la conception et l'accomplissement de ce projet ?

C'est dans ce cadre qu'il convient de situer le problème des *mises à jour* – infrastructurelles et autres – du curriculum scolaire. La difficulté est que, dans l'état actuel de la profession, les gens de métier n'ont guère accès – et n'ont en tout cas pas d'accès légitime – à une entreprise qui ne peut que *modifier* d'une façon a priori mal prévisible l'organisation de « leur discipline ». J'ai naguère donné un exemple typique – à mes yeux – d'une mise à jour indispensable, dont relève d'ailleurs l'exemple précédemment traité : la base infrastructurelle comme les activités super-structurelles du métier doivent aujourd'hui intégrer l'équipement praxéologique (mathématique) indispensable pour comprendre et assumer l'usage d'une calculatrice en divers domaines des mathématiques (Chevallard, 2006 ; Chevallard & Cirade, 2010). On ne devrait plus entendre, ainsi, certains professeurs dire à leurs élèves qu'on ne saurait conclure à l'égalité des fractions $\frac{21}{51}$ et $\frac{7}{17}$ du simple fait que la calculatrice donne, pour l'une et l'autre fractions, un même affichage (disons 0,41176470588), et cela parce que les suites de décimales correspondant à l'une et à l'autre, qui sont identiques pour les premiers rangs, « pourraient se trouver en désaccord au 50^{e} ou au 100^{e} rang par exemple ». Car *si les fractions étaient inégales*, on aurait : $\left|\frac{21}{51} - \frac{7}{17}\right| = \frac{|21 \times 17 - 51 \times 7|}{51 \times 17} \geq \frac{1}{51 \times 17} = \frac{1}{867} > 10^{-3}$; or une différence si importante – supérieure, en l'espèce, à un millième – *ne saurait échapper à une calculatrice*. On imagine qu'il y a là tout un aggiornamento mathématique à conduire, qu'il appartient *à la profession*, et non pas simplement aux gens de métier, fussent-ils réunis en collectifs éphémères ou durables, d'impulser et de conduire à son terme.

Le déclin du paradigme de la visite des œuvres

La mise à jour de la profession dans le cadre du paradigme de la visite des œuvres exige bien plus que l'ajustement, même à grande échelle, des infrastructures mathématiques. La « visite des œuvres » à laquelle le nom donné ici au paradigme d'étude scolaire actuel consiste, dans le cas qui nous occupe, à « visiter » – entendez : à étudier – les œuvres mathématiques désignées aux professeurs comme « à enseigner » – entendez : à montrer, à faire visiter – à leurs élèves. Ces œuvres peuvent être désignées par bien des noms : on parlera ainsi du *calcul* des fractions, du *théorème* de Pythagore, de la *notion* de cosinus, de la *théorie* des probabilités, de la *méthode* des combinaisons linéaires, etc. Du point de vue de la TAD, ce sont là des « complexes praxéologiques » (ou « entités praxéologiques ») faits de types de tâches T, de techniques τ, de technologies θ, d'éléments de théorie Θ. Je désignerai ces œuvres-là par la lettre O. Visiter l'œuvre O, c'est, en principe, en étudier la structure et le fonctionnement, c'est-à-dire examiner comment et de quoi est faite la machine et comment on la fait fonctionner. Le terme de visite renvoie à l'idée de monument que l'on visite et conduit à un constat : celui de la progressive *monumentalisation* de l'enseignement des mathématiques, situation dans laquelle chaque œuvre mathématique apparaît comme un monument que l'on devrait idéalement (faire) admirer, et cela sans autre raison de le faire que la raison enseignante, qui le désigne à la curiosité supposée de l'élève-visiteur. Le professeur devient un guide qui, jusqu'à un certain point, est censé éclairer ce jeune visiteur. Mais ce qui se perd presque à tout coup, j'ai essayé de le montrer ailleurs, ce sont en particulier les *raisons d'être* des monuments visités : pourquoi les a-t-on construit et pour faire quoi ? Pourquoi y a-t-il en mathématiques le monument « triangle », le monument « angle » ou le monument – plus discret – « angle saillant » ? Pour quelles raisons s'y intéresse-t-on ? Quelle *utilité* (mathématique) ont-ils ? Le déclin de l'enseignement des mathématiques du fait de sa monumentalisation va de pair avec la disparition, non seulement de réponses explicites et *vécues* à de telles questions, mais aussi *des questions elles-mêmes*. Ainsi, contrairement à ce que faisaient les manuels de géométrie du XIX^{e} siècle, si on fait encore « visiter » le parallélogramme, on ne se demande plus à quoi il peut bien servir (Chevallard, 2007a).

Le fonctionnement du PVO avec un public donné suppose des conditions exceptionnelles qui, aujourd'hui, semblent de moins en moins réunies. Il suppose ce que je nommerai − en jouant comme on va le voir avec le (double) sens du mot − un haut degré de *docilité*. En latin, *docere* signifie « enseigner » (les mots *docte*, *docteur, doctrine, document* lui sont apparentés). L'adjectif *docile* vient du latin *docilis* « disposer à s'instruire, qui apprend aisément ». Le *Dictionnaire historique de la langue française* (Rey, 1993) précise à cet égard : « L'adjectif s'est progressivement éloigné du sens propre, "disposé à se laisser instruire" (conservé par l'anglais *docile*) pour signifier "obéissant", dès lors souvent employé absolument. » Complétons cela par la notice consacrée, dans ce même dictionnaire, à son contraire, *indocile* :

> INDOCILE adj. est emprunté (1509) au latin *indocilis* « qu'on ne peut instruire, inculte, ignorant ». Antérieurement, le moyen français a eu isolément *indocible* « indocile » (v. 1380), emprunt au bas latin *indocibilis*, adjectif verbal signifiant « peu susceptible d'instruction ». Le sens propre, « à qui on ne peut rien apprendre », est sorti d'usage. <> Le glissement vers le sens moderne de « rebelle, récalcitrant », qualifiant un inanimé concret (1580), abstrait (av. 1660), une personne (1667) a dû être favorisé par l'application du mot aux barbares : *peuple indocile* « inassimilable, inéducable » pour traduire le latin *genus indocile* de Virgile.

J'ajoute une précision clé : un certain public peut être docile à l'égard de certaines œuvres et indociles à l'endroit d'autres œuvres : *docilité et indocilité n'existent pas absolument*. Le professeur découvrira ainsi avec surprise et incompréhension que le plus indocile de ses élèves se montre d'une docilité admirable en d'autres matières, ignorées de la formation scolaire, ou même en telle autre matière scolaire ! D'une manière générale, relativement aux niveaux de l'échelle de codétermination didactique, la docilité dans l'étude d'une œuvre ou d'un système d'œuvres suppose de la part des « étudiants » qu'ils assument sans perdre pied et tout à la fois une discipline *sociale*, une discipline *scolaire*, une discipline *pédagogique* et, surtout, *la discipline de l'œuvre étudiée* elle-même, telle qu'elle se redéfinit à travers le filtre des disciplines précédentes. Tout cela est fort coûteux et l'on peut échouer en l'un quelconque des niveaux invoqués ici. La formation par la visite des œuvres, où l'œuvre visitée doit *in fine* être connue de l'élève ou de l'étudiant avec un luxe de détails à mémoriser sans qu'il en connaisse pour autant les raisons d'être (sinon que « c'est important et ça vous servira plus tard »), ainsi qu'on l'observe dans les études traditionnelles, par exemple en médecine, suppose une formidable mobilisation didactique de la part des élèves. Or *l'engagement didactique* à l'endroit de l'œuvre à étudier, s'il est d'un même mouvement social, scolaire et pédagogique, se mesure en dernier ressort au degré de reconnaissance et d'acceptation de la *discipline de l'œuvre*, c'est-à-dire à la capacité individuelle et collective de prendre sur soi pour assumer les contraintes de l'œuvre. Ce qui fait que, dans le cadre du paradigme de la visite des œuvres, un certain public devient capable, individuellement et collectivement, d'un tel engagement à propos de telle œuvre tient sans doute à une variété de conditions. Mais avant d'en dire plus, je voudrais maintenant exposer un exemple dont je suppose − peut-être à tort − qu'il en surprendra plus d'un, comme il m'a surpris moi-même.

Puissance et impuissances attractives d'une œuvre : un exemple mathématique

Quand on observe l'engagement didactique, dans un certain contexte d'étude, de divers publics à propos de certaines œuvres, on voit que, pour un public donné, cet engagement et l'assomption corrélative des contraintes de l'œuvre varie plus ou moins fortement avec l'œuvre : certaines œuvres suscitent un engagement fort, d'autres n'y parviennent pas, ou plus. Dans le premier cas, on parlera souvent d'engouement : naguère, nombre d'intellectuels français se sont ainsi passionnés pour l'étude de la psychanalyse lacanienne tandis que, aujourd'hui, une certaine petite bourgeoisie s'entiche de cuisine, etc. Or il existe des raisons de penser que, s'agissant du public tout-venant de l'enseignement secondaire, l'attraction que les mathématiques peuvent exercer *ne suffit pas, ou plus,* à susciter l'investissement, les efforts d'étude que la discipline de l'œuvre exige en bien des cas. J'illustrerai cette hypothèse à l'aide d'un exemple que j'emprunte à la thèse de Pierre Job, intitulée *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*, qui a été soutenue à l'université de Liège, sous la direction de Maggy Schneider, le 7 juin 2011. De ce travail remarquable, dont l'un des principaux personnages est la notion de *limite* en analyse réelle, j'extrairai seulement un court épisode en trois parties. Avant cela, je reproduis, pour que chacun dispose d'un repère adéquat, le passage suivant de l'ouvrage classique de H. B. Griffiths et P. Hilton, intitulé *A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics* et sous-titré *A Contemporary interpretation* :

We are going to say what we mean by the sentence

27.1.1 $f(x)$ *converges to the limit l on I as x converges to c.*

Informally, we mean that the number $f(x)$ will become (and remain) arbitrarily close to l, provided we take x (in I) sufficiently close to c, but not at c.

The technical reasons for ignoring the value of f at c will appear later; but we emphasize: *c need not lie in I.* A formal definition, which eliminates the vague words like 'become', is as follows:

27.1.2 Definition. $f(x)$ converges to l on I as x converges to c provided, given $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$, such that for all $x \in I$,

$$(0 < |x - c| < \delta) .\Rightarrow. (|f(x) - l| < \varepsilon). \text{ (p. 458)}$$

Voici alors le point de départ de l'épisode annoncé, tel que Pierre Job le rapporte :

Amélie, étudiante en agrégation, discute avec Bernadette, le professeur en charge du cours de didactique pour lequel elle doit préparer, dans le cadre de ses stages, un cours sur le concept de limite. Elle pense définir « b est la limite en a de la fonction f » par la condition

$$\forall \varepsilon > 0, |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Bernadette la questionne sur cette définition, lui faisant remarquer que $f(x) = b$ lorsque la condition $\forall \varepsilon > 0, |f(x) - b| < \varepsilon$ est satisfaite, et donc que la fonction f est constante. Amélie lui répond que cela aurait été le cas seulement si elle avait considéré $\varepsilon \geq 0$ au lieu de $\varepsilon > 0$ dans la condition $\forall \varepsilon > 0, |f(x) - b| < \varepsilon$. (p. 33)

Il semblera étonnant qu'une candidate au professorat de mathématiques soit si peu au clair sur ce genre de choses. L'auteur de la thèse s'interroge en ces termes :

La définition proposée par Amélie soulève d'emblée des interrogations concernant sa cohérence logique. Où intervient a dans la définition ? Quel est le statut de x ? S'agit-il d'une constante, d'une variable ? Dans ce dernier cas, x est-elle quantifiée existentiellement, universellement ? Comment se positionne alors cette quantification par rapport à la quantification universelle portant sur ε ? Pareille définition ne témoigne-t-elle pas d'une incompréhension manifeste de la logique des prédicats ? Cette incompréhension est-elle à l'origine de la définition proposée par Amélie ? (p. 33)

En comparant la « définition » amélienne à la définition donnée par Griffiths et Hilton, on observe, formellement, que la première introduit une simplification notable. On aurait dû avoir quelque chose comme : $\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0}\ \exists\, \delta > 0\ (0 < |x - c| < \varepsilon \Rightarrow \boldsymbol{|f(x) - b| < \varepsilon})$. Ce qu'Amélie a conservé est ici mis en gras : le problème didactique lié à la difficulté conceptuelle de cette définition serait-il résoluble par évidement ? Quiconque est averti de ces questions peut certes déplorer les faiblesses évidentes d'une candidate au professorat de mathématiques. Mais en voici *plus* avec ce troisième extrait de la thèse de P. Job :

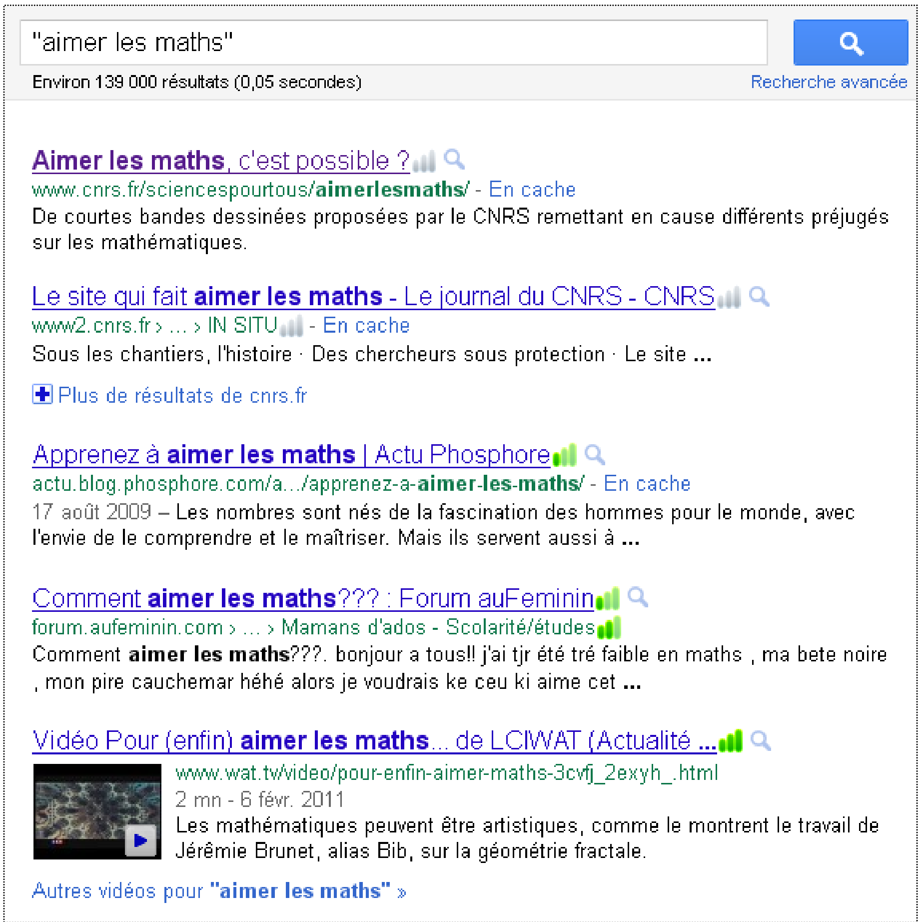
> Revenons au stage d'agrégation évoqué au point précédent et poursuivons avec la réaction de Camille, maître de stage d'Amélie. Bernadette relate à Camille l'épisode qu'elle a vécu avec Amélie et lui demande ce qu'elle en pense. Camille lui réplique qu'elle procède de même. Il s'agit, pour elle, d'une « stratégie didactique » visant à éclater la complexité de la définition usuelle de limite. Au lieu d'une définition où des conditions, portant sur a et x, d'une part, et sur b et $f(x)$, d'autre part, se retrouvent imbriquées les unes dans les autres, ce qui semble « complexe », elle propose, par le truchement de deux « définitions », $f(x)$ tend vers b si $\forall\varepsilon > 0$, $|f(x) - b| < \varepsilon$ et x tend vers a si $\forall\varepsilon > 0$, $|x - a| < \varepsilon$, une présentation où les deux conditions sont en quelque sorte « séparées ». Il est alors plus facile d'étudier séparément les deux définitions, pour ensuite former la « définition » de limite qui devient alors « triviale » : b est la limite de f en a si $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a. (pp. 38-39)

Le mal est plus grand qu'on n'avait pu le croire d'abord. On voit là des « mathématiques » qu'on eût peut-être dites autrefois *ad usum Delphini*, « à l'usage du Dauphin » (c'est-à-dire du fils de Louis XIV, pour l'instruction duquel avait été réalisée une édition des classiques grecs et latins amputés des passages « scabreux »). Mais la maîtresse de stage d'Amélie enseigne-t-elle encore, à ce moment-là, des mathématiques ? On le voit, en démembrant comme elles le font la définition de la notion de limite, Camille et Amélie s'efforcent d'alléger la discipline mathématique, jugée trop lourde à porter par leurs élèves. Mais l'opération aboutit en l'espèce *à une dénaturation de l'œuvre enseignée*. Forçons le trait. Pour nombre d'élèves, accepter que l'on a $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ne va pas d'abord de soi. La solution « amélienne » à ce problème consisterait peut-être à adopter le développement « plus naturel » $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Mais à l'évidence cette « solution » serait en l'espèce inacceptable, sauf à ne pas utiliser du tout cette identité remarquable *modern style* ; car les conséquences fâcheuses en seraient immédiatement visibles (on aurait par exemple $4 = 2^2 = (1 + 1)^2 = 1^2 + 1^2 = 1 = 1 = 2$). Il en va différemment avec la définition « allégée » de la notion de limite : que la chose puisse exister signale surtout que cette définition n'est pas, dans le contexte où elle est observée, un outil du travail mathématique, mais un simple adjuvant, à fonction surtout décorative. L'épisode que rapporte Pierre Job illustre ainsi superlativement comment l'étude scolaire d'une œuvre peut finir *par devenir impossible*, parce qu'elle exige de la part des élèves un engagement didactique que les conditions régnantes ne parviennent pas à susciter en eux.

Pour le dire autrement, l'institution mathématique semble ici devenue impuissante à obtenir de la *masse* des élèves ordinaires d'aujourd'hui qu'ils s'assujettissent adéquatement à elle.

Stratégies réparatrices : « Faites-leur aimer les mathématiques ! »

Depuis longtemps, des discours s'élèvent dans la noosphère pour souligner le lien – voire pour suggérer l'équivalence – qui existerait entre l'indocilité aux mathématiques, d'une part, et le fait de « détester » les mathématiques ou, du moins, de « ne pas les aimer », d'autre part. Buter sur les mathématiques en classe serait la conséquence de ce qu'on « n'aime pas » les mathématiques. Par contraposition, « aimer les maths » entraînerait une supposée docilité à cette matière – même si, selon une rhétorique très classique, d'aucuns glissent aussi, parfois, « qu'ils aiment les maths mais que les maths ne les aiment pas » [4]. Les discours apologétiques en faveur des mathématiques semblent abonder : la requête "aimer les maths", présentée au moteur de recherche Google le 9 août 2011 vers 10 h 45, suscite environ 139 000 résultats annoncés dont voici les cinq premiers :



---

[4] Pour de telles variations autour du thème « aimer/ne pas aimer les mathématiques », voir par exemple http://www.madmoizelle.com/forums/culture-generale/29408-math-is-beautiful.html.

On peut, disent les apologistes de la chose, « aimer les maths » pour leur *beauté* prétendue (Ruelle, 2008), pour leur *magie* supposée (Graversen, 2008, 2009), pour les *plaisirs* que leur commerce procurerait (Kaplan & Kaplan, 2003), pour leurs vertus récréatives (voir le site de Stephen D. T. Froggatt, *Maths is fun*). Ces discours, qui visent parfois explicitement à « faire aimer les maths », doivent être distingués, soulignons-le, des textes exposant les avantages que procurerait le fait d'étudier les mathématiques, soit pour les études ultérieures, soit pour l'accès à certaines professions (voir ainsi U.S. Department of Education, 1997).

Je n'examinerai pas plus avant, ici, ces types de discours, qui font par ailleurs l'objet d'une recherche particulière [Chevallard & Kim] ; et je ne ferai que trois observations. La première est que cette stratégie, toujours renaissante sous diverses formes, semble ne réussir qu'avec fort peu de gens. Significativement, un commentateur de l'ouvrage des Kaplan (2003) écrit ainsi à propos de ce livre (Brink, 2003) : "These accounts vary from tragic to laugh-out-loud funny. Those who love math won't want to miss this one, and those who would like to love it but never have should give the book a try." Ajoutons : quant à ceux *qui n'auraient jamais eu le désir d'aimer* les mathématiques, cet exposé des « plaisirs » des mathématiques les exclurait, alors même qu'il devrait – semble-t-il – les inclure en priorité ! Outre qu'elle ne semble pas réussir avec les élèves véritablement indociles, cette stratégie de la seconde chance – qu'on pourrait dire du "love at second sight" – ne semble pas pouvoir engendrer des effets *de masse*, même si elle peut bien séduire quelques personnes. Corrélativement, cette stratégie *sélectionne* les mathématiques qu'elle conduit à rencontrer – des mathématiques susceptibles de « plaire » –, ce qui est un autre de ses démérites. L'image des mathématiques qui se trouve diffusée par ce biais est en effet celle d'un champ praxéologique où règnent jeux « intellectuels », énigmes, curiosités variées, astuces, etc., ce qui surreprésente un aspect particulier (et non spécifique) du travail mathématique et constitue ainsi un trompe-l'œil illusoire, ce que l'on finit le cas échéant par « aimer » n'étant pas véritablement « les mathématiques ». Enfin, observons que, selon la stratégie envisagée ici, il est requis de l'élève non seulement qu'il apprenne à vérifier par exemple que l'on a $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n$, mais encore qu'il en vienne à « aimer ça », quand il serait beaucoup plus indiqué qu'il apprenne à voir en cette identité l'expression du fait général que la somme de deux entiers impairs successifs (comme 1 et 3, ou 5 et 7, etc.) est un entier multiple de 4. Mais la stratégie du « faites-leur *aimer* les mathématiques » bute à vrai dire sur une difficulté d'une autre nature, sur laquelle je m'arrêterai maintenant.

Stratégies réparatrices : « Faites-leur connaître les mathématiques ! »

Un des problèmes essentiels au cœur de cet exposé est le suivant : relativement à un système d'œuvres donné, quels systèmes de conditions et de contraintes sociales, scolaires, pédagogiques sont susceptibles de susciter (ou du moins de permettre) un engagement didactique adéquat chez un public déterminé ? Dans l'étude d'un tel problème, on peut évidemment restreindre le type de public, d'une part, et le système d'œuvres, d'autre part ; mais on peut aussi *écarter* telle ou telle condition *a priori* possible ou encore *imposer* telle condition, même si celle-ci n'est pas une contrainte actuelle issue de l'un des niveaux de codétermination didactique. Dans ce qui suit, je supposerai ainsi que l'on respecte deux conditions. La première est que la visée de diffusion des connaissances mathématiques étudiée n'écarte a priori *aucun public particulier* ; ou, pour le dire autrement, que l'engagement didactique que l'on souhaite susciter soit potentiellement celui de *l'ensemble des « gens »*, celui du *laos*, qui n'exclut personne (contrairement au *demos* ou à l'*ethnos*). La seconde condition est ce que je nommerai la *condition de laïcité* (le mot *laïcité*, je le rappelle, vient du grec *laos*). Cette condition tient en ceci que, tout au contraire de la stratégie visant à faire « aimer » les mathématiques, quiconque intervient « didactiquement » à l'endroit de l'élève à propos d'une œuvre donnée *s'interdit de chercher à manipuler ses sentiments ou ses croyances* à l'endroit de cette œuvre et ne recherche en vérité qu'une chose : lui faire *connaître* l'œuvre visée, ce qui n'implique d'insuffler ni tel ou tel sentiment, ni telle ou telle croyance à son propos. Ce « contrat laïque » s'énonce donc ainsi à l'adresse de l'élève : « Ce que nous ferons vise à te faire connaître l'œuvre étudiée − par exemple telle technique de résolution des équations du second degré. On ne te demandera pas d'*aimer* cette œuvre, ni de la *détester*, ou encore de n'avoir aucun sentiment à son sujet − tes sentiments t'appartiennent. On ne te demandera pas même “d'y croire”, et pas davantage de la faire tienne, d'y adhérer. On te demandera seulement de devenir capable de montrer que tu la “connais”, en un sens qui sera précisé avec toi − par exemple en montrant que tu sais résoudre une équation du second degré à l'aide de cette technique, que tu sais en préciser les raisons d'être, les conditions usuelles d'emploi, etc. » La *condition de laïcité*, que l'on peut appeler encore *contrainte de Condorcet*, rejoint la célèbre injonction de Spinoza (1632-1677) dans son *Traité politique* (1670) : « ne pas railler, ne pas déplorer ni maudire, mais comprendre » (*non ridere, non lugere, neque detestari, sed intelligere*). Bien entendu, la condition de laïcité n'empêche pas que l'élève, à l'instar de quiconque, « ait » des sentiments, et des sentiments changeants ; mais elle interdit que l'on cherche à *manipuler* ses sentiments (même si, de fait, l'aide apportée a toutes chances d'influer d'une manière ou d'une autre sur ses sentiments). Il résulte de là que, lorsqu'on étudie le problème posé plus haut – comment provoquer un engagement didactique relativement à l'œuvre à connaître ? – et cela en assumant la contrainte de laïcité, on ne saurait intégrer dans les systèmes de conditions et de contraintes cherchés le recours à la stratégie de la séduction.

Le grand problème est donc, non de séduire, mais de « faire connaître » à l'élève l'œuvre visée – de l'aider à la connaître. Le sens donné au verbe *connaître* est alors évidemment un autre grand problème, corrélatif et solidaire : la solution qui lui sera donnée étant décisive. Là encore, je serai volontairement rapide ; mais je tiens à mentionner ici et plus loin dans cette présentation certaines des contraintes que l'on peut associer à une visée de formation du *citoyen* que « l'élève » est ou deviendra, à ce que je nommerai la *condition de formation citoyenne*.

Le premier ensemble de contraintes qu'il conviendrait de satisfaire est constitutif de la *connaissance praxéologique* de l'œuvre. Cette connaissance a pour premier objet, bien sûr, la *structure* praxéologique de l'œuvre O – ce qu'elle comporte en fait de *types de tâches* T, de *techniques* $\tau = \tau_T$ relatives à ces types de tâches T, de *technologies* θ des techniques τ_T, d'éléments de *théorie* Θ qui leur sont associés. La connaissance praxéologique de l'œuvre O doit aussi, du même mouvement, s'attacher au *fonctionnement* praxéologique de O, c'est-à-dire à la manière dont τ_T permet d'accomplir les tâches t du type T, à la *portée* de τ_T (quelles tâches du type T ne permet-elle pas, ou permet-elle fort difficilement, d'accomplir ?), à la façon dont θ justifie τ_T et rend intelligible son mode opératoire, enfin aux présupposés ou appuis théoriques que la technologie θ mobilise, ouvertement ou clandestinement. Pour illustrer sommairement tout cela, je prendrai ici une « œuvre » mathématique d'apparence très simple : l'identité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$. Il s'agit là d'un résultat *technologique* qui se présente de lui-même comme justifiant la technique qui conduit, étant donné la fraction $\frac{33}{2}$ (par exemple), à écrire que l'on a $\frac{33}{2} = 33 \times \frac{1}{2}$ et qui donc permet d'accomplir une tâche du type suivant : récrire un *quotient* sous la forme d'un *produit*. Mais comment justifier l'identité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$? Ce type de questions est (en principe) classique : cela revient à demander comment *démontrer* cette identité. La technologie attendue peut, en tel discours institutionnel – dans tel manuel par exemple –, se révéler absente, ou évanescente, ou allusive. Mais elle peut aussi prendre la forme explicite suivante (par exemple) : « Par définition, $\frac{a}{b}$ est l'unique nombre qui, multiplié par b, donne a : $\frac{a}{b} \times b = a$. Or on a : $\left(a \times \frac{1}{b}\right) \times b = a \times \left(\frac{1}{b} \times b\right) = a \times 1 = a$. Donc $a \times \frac{1}{b}$ est le nombre qui, multiplié par b, donne a. C'est donc le nombre $\frac{a}{b}$. » À ce stade, on voit que plusieurs points restent à interroger. Pourquoi existerait-il un nombre x tel que $x \times b = a$? Pourquoi, s'il existe, ce nombre serait-il unique ? Et, d'ailleurs, qu'est-ce au juste qu'un nombre ? Comment justifier que l'on écrive quelque chose comme $(a \times c) \times b = a \times (c \times b)$? Etc. La connaissance praxéologique d'une œuvre peut ainsi être plus ou moins « poussée » : on le voit ici clairement. Bien entendu, on doit aussi se poser le problème de l'*utilité* de l'œuvre, de ses *raisons d'être*. Pourquoi l'égalité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ est-elle intéressante ? À quoi sert-elle ? Pourquoi, parmi l'infinité des identités littérales que l'on peut imaginer, s'intéresser particulièrement à celle-là ?

Connaître cette œuvre, c'est disposer de réponses à *toutes* ces questions – ou seulement à telle partie d'entre elles, car il y a une variation institutionnelle du connaître[5]. *Il s'agit là d'un grand problème de la profession* : étant donné une œuvre O, comment concevoir et organiser une telle rencontre ? Pour tracer le schéma de telles rencontres, on part en TAD du *schéma herbartien réduit* (Chevallard, sous presse), qui s'écrit $S(X ; Y ; Q) \hookrightarrow R^\heartsuit$, où une question Q attend une réponse $R^\heartsuit$, mais dans lequel l'œuvre à rencontrer, O, ne figure encore nullement. L'étude par X de la question Q sous la direction de Y (qui en certains cas peut être vide : $Y = \varnothing$) doit être réalisée dans des conditions et sous des contraintes telles qu'elle provoque la rencontre avec l'œuvre O, cette rencontre se révélant fructueuse dans l'élaboration de la réponse $R^\heartsuit$, ce que l'on note alors par le schéma herbartien *semi-développé* $[S(X ; Y ; Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^\heartsuit$, où le milieu pour l'étude M contient O, en sorte qu'on a donc : $M = \{ O, \ldots \}$. Le rôle joué par O dans la création de $R^\heartsuit$ constitue alors *une raison d'être* de O, et sera peut-être l'*unique* raison d'être dans un cadre institutionnel donné.

Ce schéma général visant à susciter l'engagement didactique à l'endroit d'une œuvre spécifique donnée a été portée depuis les années 1970 par la *théorie des situations didactiques* de Guy Brousseau (1998, 2003) et a été repris par la TAD à travers les notions successivement introduites d'*activité d'étude et de recherche* (AER) et de *parcours d'étude et de recherche finalisé* (PER finalisé), notions sur lesquelles on pourra notamment se reporter à mon cours à la 15e école d'été (Chevallard, sous presse). Mais deux constats doivent être faits à cet égard. Tout d'abord, *c'est un problème de la profession* (et non un problème de chaque professeur agissant *motu proprio* avant d'opérer en solo) que de mettre à la disposition des gens de métier, pour chaque œuvre à enseigner, des situations didactiques, des AER, etc., de

[5] On peut envisager de retoucher une œuvre O en une œuvre $O^\#$ qui comporte les réponses à toutes ces questions (ou seulement à telle partie d'entre elles), et en particulier à la question de l'utilité de l'œuvre ; une œuvre $O^\#$, donc, qui soit en quelque sorte un « complété praxéologique » de l'œuvre O. Pour le dire autrement, on peut essayer de faire qu'une personne ou une institution rencontre l'œuvre O d'une manière qui en fasse apparaître un tel complété $O^\#$.

nature à provoquer la rencontre avec l'œuvre selon le scénario « herbartien » rappelé ici. Or, de ce point de vue, la profession apparaît aujourd'hui encore gravement défaillante. Il est vrai – et ce sera là mon deuxième point – que, plus généralement, la profession ne s'est guère engagée dans la perspective de régénération du paradigme de la visite des œuvres tracée par la TSD et, à sa suite, par la TAD, afin de faire advenir et une épistémologie scolaire authentique, et une culture de la connaissance qui soit émancipée du formalisme académique traditionnel. Pourquoi cet échec ?

Du sublime à la plomberie

De même que c'est aujourd'hui une opinion relativement commune dans la noosphère du métier de professeur qu'il convient de « faire aimer » les mathématiques aux élèves, de même c'est une attitude largement partagée – mais non débattue – que de ne pas tarir de louanges à propos des mathématiques, lesquelles conjugueraient le vrai, le beau, le bien. Voici de cela un court exemple, que j'emprunte au préfacier d'un ouvrage grand public (il est publié par les éditeurs de l'hebdomadaire LIFE) intitulé simplement *Mathematics* (Bergamini et al, 1963), Henry Margenau (1901-1997), présenté comme étant notamment "Eugene Higgins professor of physics and natural philosophy at Yale and an editor of the *American Journal of Science*" :

> … I greet the publication of the present volume, the first of a series on the physical and biological sciences. It is particularly appropriate that it should deal with mathematics, which has a usefulness and a prestige sufficient for it to merit the title "Queen of the Sciences," indispensable to all the rest. (p. 7)

Pour ce physicien spécialiste de spectroscopie et de physique nucléaire, mais aussi « agitateur culturel » au bénéfice des sciences, les mathématiques sont donc « la Reine des Sciences ». Cette célébration euphorique des mathématiques se fonde souvent sur le caractère *universel* de ses arrêts, qui, précisément, en détermine l'utilité au point de les rendre indispensables pour les différentes sciences. Ainsi l'identité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ nous apparaît-elle comme vraie toujours et partout, à l'instar d'une essence régnant par delà ses accidents, *qu'on peut dès lors oublier*.

Cette observation nous ramène à la question des *raisons d'être*. L'expression « raisons d'être » rend un son noble qui peut faire oublier un fait essentiel. Quand on se demande à quoi sert telle œuvre, on tombe fréquemment sur la configuration suivante, qui relève de ce qu'on nomme en TAD la *dialectique des types de tâches et des techniques* : une technique τ relative au type de tâches T se laisse généralement analyser en une succession de tâches t_1^*, t_2^*, …, t_n^* des types T_1^*, T_2^*, …, T_n^* ; pour accomplir les tâches de ces types, il convient de disposer de techniques τ_1^*, τ_2^*, …, τ_n^*. On dit alors que la technique τ (ou le bloc praxique $[T / \tau]$, ou la praxéologie correspondante $[T / \tau / \theta / \Theta]$) est une *raison d'être* des praxéologies $[T_1^* / \tau_1^* / \theta_1^* / \Theta_1^*]$, $[T_2^* / \tau_2^* / \theta_2^* / \Theta_2^*]$, …, $[T_n^* / \tau_n^* / \theta_n^* / \Theta_n^*]$. Bien entendu, il se peut que, si on ne recourt plus à la technique τ pour accomplir les tâches du type T (parce qu'on lui aura substitué une autre technique $\tau^\#$), les praxéologies $[T_1^* / \tau_1^* / \theta_1^* / \Theta_1^*]$, $[T_2^* / \tau_2^* / \theta_2^* / \Theta_2^*]$, …, $[T_n^* / \tau_n^* / \theta_n^* / \Theta_n^*]$ *cessent* d'avoir T pour raison d'être – ce qui peut entraîner que, dans l'univers institutionnel que l'on considère, saisi en synchronie (et non en diachronie), ces œuvres n'ont pas, *n'ont plus* de raisons d'être ;

Quel est le problème avec tout cela ? Examinons la chose à propos de l'identité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ toujours. Quelles sont les raisons d'être possibles de cette identité ? Voici la présentation que propose un ouvrage intitulé *Algèbre* paru en 1951, concernant « formation initiale, formation continue, concours administratifs », dont l'un des auteurs (R. Cluzel) était alors professeur à l'ENNA de Paris et dont l'autre auteur (H. Court) était inspecteur général de l'Enseignement technique (Cluzel & Court, 1951, p. 24) :

> **2. Nombres inverses.** – L'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$; celui de $-\frac{3}{7}$ est $-\frac{7}{3}$.
>
> ***Deux nombres sont dits inverses s'ils ont pour produit 1.***
> L'inverse de b est b' tel que $b' = \frac{1}{b}$.
> *Diviser par b revient à multiplier par son inverse* $\frac{1}{b}$.
>
> $$\boxed{\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}}$$

Quelle raison d'être cette *Algèbre* donne-t-elle à cette œuvre mathématique dûment encadrée pour la mettre en valeur ? Réponse : celle que donnaient tous les ouvrages d'autrefois, en un temps où la calculatrice qui nous est familière n'existait pas. Le passage reproduit ci-dessus, en effet, se poursuit (et se termine) ainsi (p. 25) :

> Cette propriété est souvent utilisée dans les calculs. On remplace ainsi une division par une multiplication.
> Exemple : $\frac{38}{\pi} = 38 \times \frac{1}{\pi} \approx 38 \times 0{,}318 \approx 12{,}084$. (≈ signifie : égal *approximativement* à).

La planche d'exercices appendue à la fin du chapitre (lui-même intitulé *Quotient de deux nombres relatifs*) comporte 13 exercices dont le 12e est le suivant :

12. Calculer les inverses des nombres suivants : 0,375 ; $\frac{2}{3}$; 0,625 ; π ; $\frac{2}{\pi}$.

Application. Effectuer :$243 : 0{,}375$; $48{,}34 : \frac{2}{3}$; $168{,}32 : 0{,}625$; $3 : \pi$.

Je veux par exemple déterminer le rayon R (en mètres) d'un plateau circulaire afin que celui-ci ait une aire d'environ 20 m^2. Par nécessité matérielle, je dois le faire – imaginons-le – par simple calcul mental. La formule bien connue $A = \pi R^2$ me conduit à chercher R tel que $R^2 = \frac{20}{\pi}$. Je calcule : $\frac{20}{\pi}$ c'est 20 multiplié par (à peu près) 0,318, c'est-à-dire 2 fois 3,18, soit 6,36. Je dois maintenant extraire la racine carrée de 6,36 ; la formule de Héron me donne par exemple (si je me rappelle que $2{,}5^2 = 6{,}25$) : $\sqrt{6{,}36} \approx \frac{1}{2}\left(2{,}5 + \frac{6{,}36}{2{,}5}\right)$. Diviser par 2,5 revient à multiplier par 4 et à diviser par 10 : en commençant par multiplier par 2 et à diviser par 10, on obtient ainsi : $\frac{6{,}36}{2{,}5} = 1{,}272 \times 2 = 2{,}544$. Il vient donc : $\sqrt{6{,}36} \approx 2{,}522$. Notons qu'une calculatrice d'aujourd'hui donne : $\sqrt{\frac{20}{\pi}} = 2{,}523\ldots$; et que, avec $R = 2{,}522$, on a : $\pi R^2 = 19{,}98\ldots$

J'ajoute que tout cela appelle une petite *infrastructure* spécifique. Ainsi la valeur 0,318 de $\frac{1}{\pi}$ est-elle apprise par cœur (de même que nous apprenons encore par cœur une valeur approchée de π). En outre, les ouvrages semblables à celui examiné ici proposent une *table des inverses*, comme ci-après, où la table couvre les entiers de 1 à 100 (Cluzel & Court, 1951, p. 308) :

308 **Tables numériques.**

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1\,000}{x}$
1	1	1	1,000	1,000	1 000,00
2	4	8	1,414	1,260	500,00
3	9	27	1,732	1,442	333,33
4	16	64	2,000	1,587	250,00
5	25	125	2,236	1,710	200,00
6	36	216	2,450	1,817	166,67
7	49	343	2,646	1,913	142,86
8	64	512	2,828	2,000	125,00
9	81	729	3,000	2,080	111,11
10	100	1 000	3,162	2,154	100,00
11	121	1 331	3,317	2,224	90,91
12	144	1 728	3,464	2,289	83,33
13	169	2 197	3,606	2,351	76,92
14	196	2 744	3,742	2,410	71,43
15	225	3 375	3,873	2,466	66,67
16	256	4 096	4,000	2,520	62,50
17	289	4 913	4,123	2,571	58,82

L'identité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ est donc *précieuse* parce qu'elle permet de faire d'humbles calculs comme ceux présentés ci-dessus ! C'est à ce propos que j'ai parlé naguère, plus généralement, de *plomberie mathématique* (Chevallard, 2007a). Pour ceux qui ont été incités depuis toujours à regarder l'activité mathématique comme touchant au sublime, il y a là, je suppose, quelque chose comme une douloureuse agression narcissique. Mais je voudrais maintenant présenter rapidement un second exemple, qui se situe à un niveau d'élaboration mathématique un peu plus complexe.

Cette nouvelle pièce de « plomberie mathématique » est extraite d'un ouvrage signé de G. Lemaire, intitulé *Questions d'algèbre élémentaire (Homogénéité – Symétrie – Calcul rapide*), qui a paru chez Vuibert en 1923. Le passage retenu montre exemplairement, je crois, ce que signifie l'assertion selon laquelle « les mathématiques, c'est de la plomberie ». Dans un premier temps, l'auteur énonce et démontre le théorème que voici (pp. 14-15) :

> **11. Théorème.** – *Toute relation homogène reste vraie quand on y remplace les lettres par des valeurs proportionnelles et réciproquement.*
>
> $f(x, y, z) = 0$ étant homogène et de degré m par rapport aux lettres x, y, z, si l'on appelle k la valeur commune des rapports $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ et que l'on remplace x, y, z par ak, bk, ck, on aura
>
> $$k^m f(a, b, c) = 0\ ;$$
>
> comme le facteur k^m n'est pas nul, on a bien
>
> $$f(a, b, c) = 0.$$
>
> Remarquons que de l'égalité
>
> $$f(x, y, z) = k^m f(a, b, c)$$
>
> il résulte que, si inversement $f(a, b, c) = 0$, on aura
>
> $$f(x, y, z) = 0.$$
>
> Donc pour vérifier l'exactitude d'une relation homogène par rapport à des lettres x, y, z, il suffira de vérifier la relation obtenue en remplaçant ces lettres par des nombres proportionnels.

Remarquez que l'auteur prend soin de préciser l'utilité dudit théorème – « pour vérifier l'exactitude d'une relation homogène ». Mais il en tire alors un corollaire qui est ici l'analogue de l'identité $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ vue plus haut (p. 15) :

> **1re Application.** – Si l'on suppose $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, démontrer que l'on a
>
> $$\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = \sqrt{(a + b + c)(x + y + z)}.$$

À partir du « théorème » établi, ce résultat est en fait immédiat (p. 15) :

> La relation étant homogène de degré $\frac{1}{2}$ par rapport à *x*, *y*, *z*, il suffit de vérifier qu'en remplaçant *x*, *y*, *z* par *a*, *b*, *c* on a
>
> $$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} = \sqrt{(a+b+c)(a+b+c)},$$
>
> ce qui est évident.

Mais pourquoi donc s'intéresser à ce fait que, lorsque $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, on a $\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz} = \sqrt{(a+b+c)(x+y+z)}$? Quelle utilité cette identité peut-elle avoir ? Voici la réponse de l'auteur (pp. 15-16) :

> La propriété établie permet de déduire le volume d'un tronc de pyramide polygonale du volume supposé connu du tronc de pyramide triangulaire. B et *b* étant les bases du tronc considéré de hauteur *h*, si nous le décomposons en une somme de pyramides triangulaires de bases B_1, B_2, B_3, …, b_1, b_2, b_3, …, le volume cherché sera la somme
>
> $$V = \frac{h}{3}(B_1 + b_1 + \sqrt{B_1 b_1}) + \frac{h}{3}(B_2 + b_2 + \sqrt{B_2 b_2}) + \ldots$$
>
> ou $V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + \sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \sqrt{B_3 b_3} + \ldots)$,
>
> $$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \sqrt{B_3 b_3} + \ldots).$$
>
> Il suffit de prouver la relation
>
> $$\sqrt{B_1 b_1} + \sqrt{B_2 b_2} + \sqrt{B_3 b_3} = \sqrt{Bb} = \sqrt{(B_1 + B_2 + B_3)(b_1 + b_2 + b_3)}$$
>
> On y arrivera en prouvant l'égalité des rapports
>
> $$\frac{b_1}{B_1} = \frac{b_2}{B_2} = \frac{b_3}{B_3}.$$
>
> Ces rapports ont en effet pour valeur commune $\frac{H'^2}{H^2}$, H' et H représentant les hauteurs de deux pyramides dont le tronc est la différence.

La pièce de plomberie mathématique élaborée – le théorème et son corollaire – a ici une unique raison d'être : elle « permet de déduire le volume d'un tronc de pyramide polygonale du volume supposé connu du tronc de pyramide triangulaire » ! On ne saurait rêver motif plus singulier ni plus humble aux yeux de qui attend de l'universel et du grandiose. J'ajoute que, aimer les mathématiques, c'est aimer cela, et non les rêveries glorieuses oublieuses du réel.

Tous ces faits posent à la profession un problème difficile mais sans doute vital pour ne pas aller plus avant dans la monumentalisation et l'évidement de l'enseignement des mathématiques : contre la tentation mondaine du sublime, il nous faut assumer concrètement la réalité « plombière » de l'activité mathématique. La non-assomption actuelle est certainement *l'une* des causes principales du fait que ni les apports de la TSD, ni les propositions de la TAD n'ont pu, jusqu'à aujourd'hui, irriguer le métier en profondeur. Quelle qu'en soit le mode de réalisation, en effet, le schéma herbartien pousse en avant des situations didactiques qui apparaissent aux partisans du sublime comme *mathématiquement trop particulières*, trop singulières, articulées à des *détails* trop spéciaux pour être intéressants. De telles situations sont donc regardées, non comme faisant rencontrer *l'architecture même* de l'œuvre mathématique, mais comme des artifices *pédagogiques* sans grand lien avec la matière mathématique visitée et dont on brûle de se passer pour en arriver directement à la supposée quintessence mathématique, alors que celle-ci est un leurre fait d'œuvres amputées, évidées, éviscérées. C'est dans l'épistémologie actuelle de la profession que se trouve ainsi la source d'un malentendu crucial, qui reconduit le paradigme de la visite des œuvres en le laissant se dégrader.

4. Le paradigme du questionnement du monde et ses problèmes

Contrats épistémiques temporels et diffusion praxéologique de masse

Au moment d'aborder le grand problème de l'émergence du paradigme du questionnement du monde ainsi que les problèmes que cette émergence pose et posera à la profession, je voudrais revenir sur les principales conditions a priori sous lesquelles ces problèmes sont envisagés ici. J'ai souligné déjà la condition *de laïcité* (ou condition *de Condorcet*). Je voudrais m'arrêter maintenant sur un problème lié à la condition *de formation citoyenne* déjà évoquée, un problème que, aujourd'hui, la profession ne reconnaît pas, semble-t-il, comme un problème qui lui est posé. Pour cela, je rappellerai d'abord deux épisodes qui n'auront pas échappés à quiconque se préoccupe de l'état de la culture mathématique *ordinaire* dans ce pays. Deux ministres de l'Éducation nationale successifs, Xavier Darcos en 2008 et Luc Chatel en 2010, ont l'un et l'autre séché, sur un plateau de télévision, sur un problème simple de proportionnalité : le premier dans le *Grand Journal* de Canal +, où il était interrogé par la chroniqueuse Ariane Massenet, le second sur RMC, où il était interrogé par le journaliste Jean-Jacques Bourdin (Bielak, 2011). Le premier, confronté à la question « Sachant que 4 stylos valent 2,42 euros, combien valent 14 stylos ? », s'est d'emblée récusé en s'exclamant : « Oh ! La règle de trois, je ne sais pas la faire ! » Le second, quant à lui, a dû répondre à une question extraite du cahier d'évaluation des élèves de CM2 : « Dix objets identiques coûtent 22 euros. Combien coûtent quinze de ces objets ? » Une réponse est venue assez vite : 16,5 euros, soit la moitié du prix attendu, ce qui, ainsi que l'ont remarqué plusieurs commentateurs, met 15 objets à un prix *inférieur* à celui de 10 de ces objets. Tout cela nous rappelle une *vérité essentielle* des relations encore école et société : l'école d'aujourd'hui s'engage devant la société à ce que les élèves qui lui sont confiés sachent un jour – le jour de l'examen – résoudre de tels problèmes et, plus généralement, possèdent telle ou telle connaissance précisée par les programmes ; *mais elle ne s'engage pas* sur le devenir de ces acquisitions *au-delà de l'examen*, lequel délimite ainsi ses responsabilités de diffusion des connaissances : après l'examen – après le « contrôle » –, advienne que pourra, semble-t-on nous dire. Récemment, l'historien Alain Corbin (2011) écrivait ceci, qui nous rappelle aussi que, reprenant implicitement le point de vue de l'institution scolaire, les études *sur* l'école elles-mêmes se cantonnent généralement au seul *temps de l'école* :

> Nous ignorons ce que savaient les agriculteurs et les artisans des petites communes rurales, à la fin du XIX^e siècle. Les nombreux ouvrages consacrés à l'histoire de l'école, l'étude des manuels scolaires, l'analyse de leur contenu renseignent sur ce que les enfants avaient pu apprendre, pour autant qu'ils aient été de bons élèves. Mais nous ne savons presque rien de leurs acquisitions et de leurs pratiques culturelles ultérieures. (p. 10)

Tout cela conduit à soulever une question clé : quel rapport avons-nous avec la « durabilité » des connaissances diffusées à l'école ? Pour éclairer cette interrogation, je nomme *contrat épistémique temporel* le contrat précisant ce que la personne ou l'institution est convenue de faire *dans la durée* avec les connaissances rencontrées à l'école (ou en quelque institution que l'on voudra). Je distingue alors, toujours pour clarifier les choses, trois *types* de contrat épistémique temporel. Dans le premier type, qui semble aujourd'hui sorti d'usage, le contrat stipule que les connaissances enseignées devront être conservées indéfiniment, comme un *trésor*, dont la conservation est confiée à l'élève, puis à l'adulte qu'il deviendra, même s'il devait ne jamais plus s'en servir lui-même. Un deuxième type de contrat, qui semble dominant aujourd'hui, est à l'opposé du précédent : il porte l'élève ou l'étudiant dont il règle la conduite à *apprendre le moins possible* et à *retenir le contenu appris le moins longtemps possible*, de façon cependant à pouvoir poursuivre les études dans lesquelles il s'est engagé. Le troisième type de contrat est, si l'on peut dire, intermédiaire entre les deux précédents : ce qui a un jour été appris et conservé un certain temps en état de « marche », ce dont on a possédé un temps *a working knowledge*, donc, n'est pas destiné à un oubli rapide et définitif mais, tout au contraire, est promis, en principe indéfiniment, à des *reprises* et à des *mises à jour* qui dépendront des besoins éprouvés par la personne ou l'institution concernée. Aujourd'hui, les contrats épistémiques temporels du deuxième type gagnent du terrain au point que leur principe devient la norme à laquelle se conforme le rapport à la connaissance et à l'ignorance de nombre de personnes et d'institutions. L'élève qui a passé le baccalauréat et choisit alors de faire des études de sciences sociales, par exemple, considère souvent comme un droit imprescriptible de n'avoir plus jamais, à ce titre, à visiter des œuvres relevant des mathématiques, ou de la physique, ou de la chimie, etc. Bien entendu, cela s'applique tout autant aux autres matières scolaires : nombre d'étudiants en physique s'attendent à ce qu'on respecte leur « droit », acquis du fait de leur choix d'études supérieures, de ne plus avoir à « faire » d'orthographe, de grammaire, de dessin, de philosophie, etc. Cette gestion du rapport aux œuvres rencontrées est marquée par un délestage cognitif qui ignore toute nostalgie épistémique et pourrait être résumée − sans élégance, mais de façon authentique − par le mot d'ordre brutal « Corbeille. Vide corbeille ».

Il devrait être clair, au plan de la société (au moins), que la non-durabilité, la fugacité parfois revendiquées des équipements praxéologiques acquis à l'école *ne respectent pas les droits du citoyen* face aux exigences cognitives de la vie sociale. Le contrat liant, encore aujourd'hui, école et société, qui exonère l'école de ce qui advient après elle, semble à cet égard devoir évoluer : obscurément sans doute, une redéfinition s'ébauche depuis au moins deux décennies dans laquelle le futur citoyen se voit reconnu le droit (qu'il ne brigue pas nécessairement) que la formation scolaire lui permette, dans le cadre d'une société soucieuse qu'il puisse en être ainsi (l'école, ici, n'est pas un système isolé au sein de la société), de satisfaire autant que possible ses besoins cognitifs et praxéologiques à venir. Cette redéfinition constitue en soi un grand problème pour la profession tant celle-ci, quoiqu'attachée à la tradition démocratique et progressive d'une éducation pour tous, est travaillée de façon insistante par des pulsions élitaires sur lesquelles je ne m'étendrai pas ici mais dont témoigne plus d'un écrit en provenance de la noosphère[6]. Le problème auquel je fais référence est celui de construire une éducation scolaire qui promeuve et diffuse un rapport à la connaissance et à l'ignorance gouverné par un contrat épistémique temporel du troisième type. Quel rôle la profession pourrait-elle − ou devra-t-elle − jouer à cet égard ?

[6] Ainsi en va-t-il de la récente pétition intitulée *La France a besoin de scientifiques* (2010), qui, par delà le souci légitime de formation de travailleurs scientifiques, paraît oublier sans plus de façon les besoins en la matière des simples citoyens.

La notion d'enquête « codisciplinaire »

Ce qui émerge en plusieurs points du continent éducatif, c'est ce type de situation que résume le schéma herbartien réduit, $S(X\,;\,Y\,;\,Q) \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, où une instance X – une personne (qu'il s'agisse d'un élève, d'un étudiant, d'un chercheur, d'un militant associatif, etc.), une famille, une classe, un laboratoire, etc. – rencontre pour l'étudier une question Q qui prend alors, pour X, le statut de problème à résoudre, éventuellement avec l'aide ou sous la direction d'une instance Y. Je ne brosserai pas ici le tableau des germes institutionnels du schéma herbartien que l'école a pu connaître depuis vingt ou trente ans : s'il est évident que la notion de situation didactique de la TSD ou les notions d'AER et de PER de la TAD participent de ce paradigme d'étude scolaire, il en va de même des *travaux personnels encadrés* (TPE) introduits en 2000 dans certaines classes de première en France et actuellement toujours vivants, des *itinéraires de découverte* (IDD) naguère présents au collège mais désormais morts ou moribonds, de la *« démarche d'investigation »* récemment intronisée (Loisy, Trgalova & Monod-Ansaldi, 2010), de l'*inquiry-based learning* américain dont elle s'inspire, etc. Mais je soulignerai surtout que toutes ces tentatives ont vu soit leur ampleur limitée, soit leur nature altérée plus ou moins profondément, et cela souvent dès leur conception (je pense en particulier à l'*inquiry-based teaching*), par la puissance intimidante du paradigme de la visite des œuvres. Je voudrais donc commencer par décrire sommairement ce qu'on entend à ce jour, en TAD, sous le nom d'*enquête*, mot qui se substitue ici à l'expression plus ancienne d'*enquête codisciplinaire*, laquelle n'en conserve pas moins quelque vertu en certains contextes d'emploi.

Considérons donc une certaine question Q, un ensemble d'« étudiants » X, un ensemble de directeurs d'étude et d'aides à l'étude Y. À titre d'exemple, je me référerai ici à une unique question, Q_γ, qui a été un peu étudiée à la fin de l'année scolaire écoulée dans un cadre que j'ai déjà présenté lors de la 15^e école d'été, un atelier établi dans un collège marseillais, intitulé « Enquêtes sur Internet », conduit cette fois avec des élèves de 3^e. Cette question, on le verra aisément, ne relève pas du champ mathématique *seul* – là n'est nullement le but de l'atelier, par nature « codisciplinaire » :

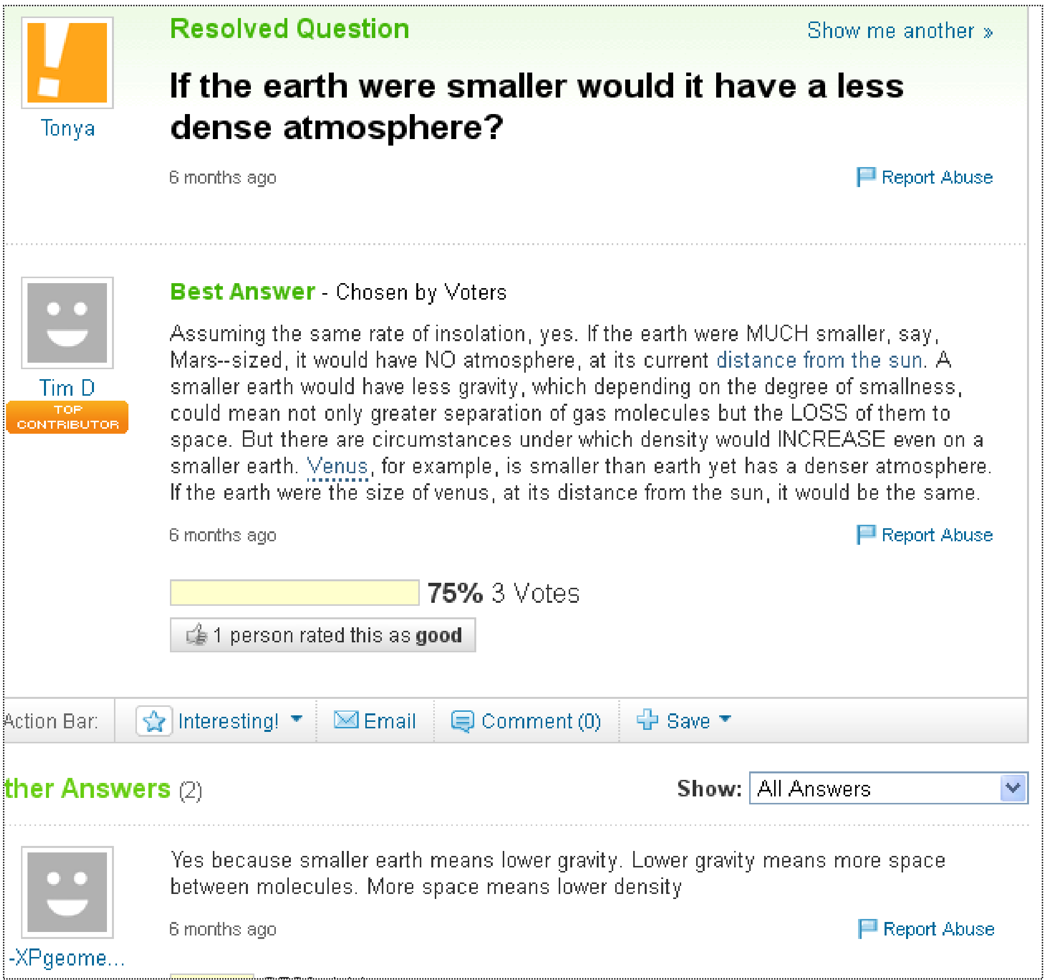
> Q_γ. Un voyageur va de Paris (France) à São Paulo (Brésil). Le vol dure environ 12 heures. Il rêve que la Terre soit deux fois plus petite qu'elle est, pour raccourcir le voyage. Que se passerait-il pour les humains si la Terre était comme il le rêve ? La vie sur Terre serait-elle la même ? En quoi changerait-elle ?

Que faire pour étudier cette question ? J'ai rappelé plus haut le schéma herbartien semi-développé $[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \looparrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$. Lorsqu'on développe ce schéma (Chevallard, sous presse), on obtient ceci : $[S(X\,;\,Y\,;\,Q) \looparrowright \{ R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m \}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$; le milieu didactique M s'écrit donc : $M = \{ R_1^{\lozenge}, R_2^{\lozenge}, \ldots, R_n^{\lozenge}, O_{n+1}, \ldots, O_m \}$. Cette explicitation symbolique permet de marquer en quelles façons la *pédagogie de l'enquête* à laquelle nous avons travaillé ces dernières années rompt avec la culture scolaire aujourd'hui dominante. Une *première rupture* tient dans ce fait : cherchant à élaborer une réponse $R^{\heartsuit}$ à la question Q, X peut *et doit* s'enquérir des réponses $R^{\lozenge}$ existant « dans la littérature » – et pas seulement des réponses, que l'on peut noter respectivement $R_x^{\lozenge}$, $R_{X'}^{\lozenge}$, $R_y^{\lozenge}$, $R_{Y'}^{\lozenge}$, proposées *motu proprio* par tel ou tel « étudiant » $x \in X$, par telle ou telle équipe d'étudiants $X' \subset X$, par tel aide à l'étude $y \in Y$ ou par telle ou telle partie Y' de Y. Ce vocabulaire de chercheur – étudier la littérature, y compris le « folklore » – rappelle que, dans une enquête, il faut des raisons très spéciales pour ne pas accomplir ce geste de base de la recherche : examiner ce qui a été dit, fût-ce obliquement, par d'autres à propos de la question étudiée. De tel « dits » – qui, en règle générale, sont des écrits – sont ce qu'on nomme en TAD des *exposés* (sur la question Q et, parfois, sur d'autres choses aussi). Les *documents* contenant de tels exposés sont des *ressources* pour l'enquête. Plusieurs points de rupture importants avec l'ordre scolaire usuel se concentrent sur ce moment de l'enquête. Tout d'abord, la recherche des exposés susceptibles d'être utiles à l'enquête est le fait de X guidé par Y non le fait de Y seul, même si Y peut apporter *motu proprio* une contribution à la constitution de M. Une telle recherche « documentaire » met en jeu de façon cruciale *la dialectique du parachutiste et du truffier*, qu'il convient donc d'apprendre à manier[7]. Ensuite, ces exposés ne sont pas conçus et réalisés à l'intention d'un usage « scolaire » par des élèves de tel ou tel niveau : ils n'ont a priori aucune raison d'être « adaptés » à X ; c'est à l'inverse à X qu'il revient, si l'on peut dire, de s'adapter à eux, leur bon usage supposant de la part de X dirigé par Y, un maniement adéquat de la *dialectique des boîtes noires et des boîtes claires*. Enfin, l'exploitation de l'exposé d'une réponse $R^{\lozenge}$ *quelle qu'elle soit* appelle un travail méthodique de confrontation, de contrôle, de vérification, qui participe plus largement de la mise en œuvre – essentielle – de la *dialectique des médias et des milieux*.

Dans le cas de la question Q_{γ} ci-dessus, après une première recherche documentaire qui s'était révélée décevante – le moteur de recherche Google proposant par exemple le thème « Si la Terre était un village », qui s'avère sans rapport avec la question étudiée –, le

[7] Sur les dialectiques mentionnées ici, voir par exemple Chevallard, 2007b.

premier document qu'examinera l'atelier est reproduit ci-après[8]. Comme on le verra, c'est un document en anglais, intitulé *If the earth were smaller would it have a less dense atmosphere?* La question énoncée dans le titre n'est pas sans rapport avec la question Q_γ : d'où le choix de ce document. En dépit de la connaissance fort modeste que semblent avoir de cette langue les élèves de l'Atelier, l'habitude a été prise de travailler sur des textes en anglais, que l'on rencontre constamment dans les recherches sur Internet.



Je reproduis ci-après une partie d'un compte rendu d'observation de la séance afin de donner une idée de difficultés typiques, à ce stade, du travail d'enquête :

▪ On s'arrête sur la première phrase : "Assuming the same rate of insolation, yes. If the earth were MUCH smaller, say, Mars--sized, it would have NO atmosphere, at its current distance from the sun."

[8] Voir à l'adresse http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20110129040812AAjNPUw.

▪ Ŷ commente : « En diminuant le rayon de la Terre, on diminue son ensoleillement. » Il questionne : « Quel est le rayon de Mars ? » Nabil répond rapidement : 3357 km. Une planète comme Mars serait donc ce à quoi ressemblerait la Terre « en deux fois plus petit » ; c'est cela qui intéresse l'Atelier. Le document affirme que, alors, à la distance du Soleil qui est la sienne (et qui n'est pas celle de Mars, plus proche du Soleil), la Terre n'aurait pas d'atmosphère.

▪ Ŷ interroge les élèves : « Pourquoi n'y aurait-il pas d'atmosphère ? Vous avez une idée ? » Louisianne : « Non. » Ŷ : « En physique, vous connaissez la relation $P = mg$: le poids, c'est la masse multipliée par la pesanteur g. Si la pesanteur diminue, le poids diminue. Quelqu'un qui pèse 40 kilos ne pèsera plus que 20 kilos par exemple. » Il poursuit : « Si la Terre était plus petite, la pesanteur diminuerait. Pourquoi ? » Louisianne : « Parce que la pesanteur dépend de la masse de la Terre. » Ŷ : « Vous savez ça. » Louisianne : « On a vu des formules. » Ŷ enchaîne : « Donc, l'attraction diminuerait ; l'atmosphère "foutrait le camp". » Il s'arrête sur le mot *density*, en précisant que cela désigne, en anglais, la masse volumique et en demandant aux élèves s'ils connaissent cette dernière expression : réponse négative des élèves. [La notion de masse volumique, en effet, n'est abordée qu'en seconde.]

▪ L'examen du texte de la réponse avance. Ŷ demande ce que signifie *increase* mais n'obtient pas de réponse. Ce nonobstant, on interprète la suite de la réponse. Sur la question de l'atmosphère, la comparaison est faite avec ce qui se passe en montagne où, au-dessus d'une certaine altitude, on a du mal à respirer.

▪ Louisianne suggère alors d'examiner la seconde réponse figurant sur le document : "Yes because smaller earth means lower gravity. Lower gravity means more space between molecules. More space means lower density."

▪ Ŷ souligne que cette réponse ne fait que reprendre la réponse précédente, avant d'ajouter : « Mais est-ce que c'est vrai, cela ? On part de cette piste : si la Terre était deux fois plus petite, il n'y aurait pas d'habitants car il n'y aurait pas d'atmosphère. Il va falloir vérifier… »

Je reviendrai un peu plus loin sur certains aspects de ce fragment de chronique. Mais je voudrais maintenant aborder un autre aspect du travail d'enquête : celui lié à la rencontre qu'il provoque d'œuvres O diverses, relevant de multiples disciplines. D'une manière générale, une œuvre O rencontrée dans un travail d'enquête et dont on pense − à tort ou à raison − qu'elle pourrait jouer un rôle dans la construction de $R^\heartsuit$ doit être étudiée dans cette perspective − pour ce qu'elle pourrait apporter à l'élaboration de $R^\heartsuit$. C'est ce qu'on nomme l'étude *finalisée* de O, « finalisée » signifiant ici « ayant une finalité », à savoir celle de contribuer à la fabrication de $R^\heartsuit$. L'étude finalisée d'une œuvre est souvent fort différente de l'étude « générale » − que l'on croit faussement « universelle » − de l'œuvre, qui s'est construite sur des finalités souvent oubliées – les raisons d'être de l'œuvre –, dont les fragments se juxtaposent sans s'articuler dans le curriculum scolaire traditionnel. Je soulignerai à cet égard une remarque cruciale : face à une entité – une notion, une affirmation – apparaissant en un texte, comme ci-dessus, le professeur d'aujourd'hui est souvent porté à… professer, en « faisant cours » sur cette entité – quand, du moins, il le peut. Or il n'y a, a priori, aucune raison pour que de telles considérations, « classiques » pour lui, et que le professeur a ainsi « en stock », soient pertinentes pour l'étude en cours. Cette étude doit en effet se développer selon une logique propre, dictée (parfois obscurément, il est vrai) par le projet de répondre à la question étudiée.

Un obstacle fondamental : l'habitus rétrocognitif

On voit déjà, à ce stade, surgir trois grands problèmes solidaires, qui sont autant de problèmes de la profession, dans la mesure où une pédagogie de l'enquête doit être construite et assumée : celui, d'abord, du rapport adéquat à la documentation, aux ressources, bref, à la culture ; celui, ensuite, du rapport idoine aux réponses $R^\lozenge$ identifiées dans cette « littérature » ; celui, enfin, du rapport opportun aux œuvres O qu'on y rencontre chemin faisant. Mais une autre difficulté surgit qui semble consubstantielle – et coextensive – au paradigme scolaire de la visite des œuvres : *l'habitus rétrocognitif*. De quoi s'agit-il ?

L'obstacle rétrocognitif se révèle aisément, à la satisfaction du chercheur mais au désarroi de l'enseignant, lorsqu'on demande à un étudiant d'entrer dans le schéma de l'enquête à propos d'une question Q qu'il doit lui-même proposer (Ladage & Chevallard, sous presse). Ce qu'on observe alors, c'est que, dans presque tous les cas, le fait de s'engager à propos d'une question Q suppose que l'étudiant estime *connaître à l'avance la matière d'une réponse « acceptable » à cette question*, ce qui est une attitude pratiquement *antinomique* de l'idée même d'enquête comme pratique ouverte sur le non-connu. L'idée sous-jacente semble être la suivante : je ne peux apporter ici et maintenant de réponse à la question Q que si je dispose *déjà* d'un « matériel » suffisant pour élaborer une telle réponse. Il y a là un automatisme de pensée dont on peut supposer qu'il est le fruit d'une imprégnation de longue durée de nos sociétés par le rapport scolaire à la connaissance et à l'ignorance induit par la fiction d'un temps didactique qui ferait passer mécaniquement la connaissance du néant à l'être. Scolairement, la chose peut s'exemplifier en ces termes : « Avant le cours du professeur, j'ignorais *totalement* la notion de *density* ; après, je dispose de *tout* ce qu'il faut pour la connaître. »

Par contraste avec la rétrocognition – qui pose, grosso modo, qu'on ne peut connaître que ce que l'on a déjà visité –, la *procognition* est le combustible essentiel de toute enquête et de toute recherche : ce que l'on sait déjà, ou ce que l'on croit savoir, ne doit pas hypothéquer ce que l'on *peut* savoir[9] ni empêcher de connaître ce qu'on aura avantage à savoir pour amorcer ou continuer l'enquête visée. On peut penser, ainsi, que plus d'un professeur d'aujourd'hui, à suivre l'ébauche d'exemple (à propos de la question Q_γ) qui illustre la notion d'enquête ci-dessus, s'étonnera que l'on n'ait pas rendu transparent *à l'avance* d'abord le vocabulaire anglais utilisé, ensuite les éléments de physique et de chimie mis en jeu, etc.

Je dois souligner, pour éviter des malentendus fâcheux, que la « maladie rétrocognitive » n'est évidemment pas réservée aux élèves, étudiants et professeurs en tant que sujets de l'institution scolaire. Pour illustrer la chose, je prendrai deux exemples rapides et assez différents. Dans un entretien récemment publié, passionnant pour le chercheur intéressé par les problèmes que j'évoque ici, le responsable des masters « Sciences de l'environnement, du territoire et de l'économie » de l'université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, Jean-Paul Vanderlinden (2011), rapporte que nombre d'étudiants de ce master qui ont reçu une formation supérieure « scientifique » se plaignent dans les termes suivants (qui rendent un son connu) : « M'sieur, l'épistémologie et l'histoire, ça ne nous intéresse pas ; nous ne devions plus faire de philo après le bac. Pour travailler dans la physique du climat, la philosophie ne nous servira à rien. » Ce responsable dit essayer de les convaincre en leur tenant ce petit discours : « Vous ne pourrez pas travailler sans vous demander d'où vient la science, où elle va ; l'histoire a façonné notre perception du monde ; la philosophie est fondamentale, maîtriser les concepts, c'est maîtriser notre existence. » Et d'exprimer cet immense regret :

> Si dès le lycée on donnait à lire le petit livre de Schopenhauer *L'Art d'avoir toujours raison*, dans lequel le philosophe démonte les ressorts les plus usuels de la mauvaise foi, les gens seraient armés pour démystifier le discours d'un Claude Allègre. (p. 133)

On a là, en vérité, un exemple typique d'*automatisme rétrocognitif*. S'il est vrai que le texte de Schopenhauer est d'une telle « efficacité », et puisque ce master fait une place à des enseignements de *philosophie*, pourquoi ne pas prendre le taureau par les cornes et y faire étudier *L'Art d'avoir toujours raison*, texte que, au reste, on trouve gratuitement en ligne ? Ou bien l'efficacité de cet écrit *en master* supposerait-elle qu'on l'ait étudié *dès le lycée* ? Sans doute pas. On aperçoit ainsi le réflexe rétrocognitif : il faut que les outils soient disponibles

[9] On pensera, ici, à l'expression latine *scire licet* « il est permis de savoir »Cette expression a donné l'adverbe *scilicet* qui s'emploie en anglais (sous l'abréviation sc. ou ss.) au sens de *namely, to wit, that is to say*, c'est-à-dire… *à savoir.* (Le latin *scire*, savoir, se retrouve notamment dans *science*.)

avant, à distance des usages qu'on en fera ; au moment où il faut les utiliser, il est trop tard – le temps passé ne se rattrape pas.

J'ajoute à cela un second exemple, qui se présente comme un symptôme très discret, à peine perceptible. Le mathématicien et physicien théoricien Roger Penrose a publié en 2004 un gros ouvrage, à teneur élevée en mathématiques de haut niveau, intitulé *The road to reality. A complete guide to the laws of the universe*. Ce livre a été publié en traduction française en 2007 sous le titre *À la découverte des lois de l'univers. La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique*. Confrontons sur un court passage – intéressant à plus d'un titre mais sur lequel nous ne nous attarderons pas ici – le texte original de Penrose et le texte en français proposée par la traductrice, Céline Laroche.

The reader will find that in this book I have not shied away from presenting mathematical formulae, despite dire warnings of the severe reduction in readership that this will entail. I have thought seriously about this question, and have come to the conclusion that what I have to say cannot reasonably be conveyed without a certain amount of mathematical notation and the exploration of genuine mathematical concepts.	Je n'ai pas hésité à faire usage de formules mathématiques dans ces pages, en dépit des sinistres présages à l'égard de la réduction drastique que cela augure pour le nombre de mes lecteurs. Après avoir beaucoup réfléchi à la question, j'en suis arrivé à la conclusion que ce que j'avais à dire ne pouvait être transmis sérieusement sans un minimum de notations mathématiques, et sans exploration préalable des véritables concepts mathématiques.

La traductrice, qui semble par ailleurs fort rigoureuse, a fauté ici par rétrocognitivité : là où Penrose parle simplement de "the exploration of genuine mathematical concepts", elle a ajouté un qualificatif, comme si elle ne pouvait s'empêcher de le faire, en parlant de l'« exploration *préalable* des véritables concepts mathématiques ». Là où l'on doit entendre, à suivre Penrose, que les concepts mathématiques seront examinés au fur et à mesure, en fonction des besoins et des sujets d'étude, la version française suppose – sans raison évidente autre que l'automatisme culturel de rétrocognition – qu'il convient de les étudier *à l'avance*.

Bien d'autres exemples suggèrent que l'habitus rétrocognitif est aujourd'hui dominant, dès lors que l'ombre tutélaire de l'école actuelle enveloppe personnes ou institutions. Mon hypothèse est que l'obstacle rétrocognitif, qu'a permis de mettre en lumière le travail sur la notion d'enquête mené depuis quelques années, a gêné, voire stoppé la diffusion des praxéologies didactiques promouvant, fût-ce à titre de simples moyens, un rapport procognitif à la connaissance et à l'ignorance. Lors de la précédente école d'été, j'avais présenté une AER réalisée dans une classe de 5^e^ par une professeure stagiaire au cours d'une séance dont la vidéo a quelque peu circulé. Or il m'est revenu que, l'ayant visionnée, des formateurs avaient pu tiquer – pour ne pas dire plus – devant une situation où les élèves devaient utiliser comme outil clé une propriété (relative aux diagonales d'un parallélogramme) *qu'ils ne connaissaient pas à l'avance* – ce que pourtant ces élèves faisaient sans ciller. Le « pli » rétrocognitif constitue sans doute l'un des plus lourds problèmes auxquels la profession est et sera confrontée dans la transition historique d'un paradigme en déclin historique vers un paradigme encore dans les limbes.

La connaissance des œuvres revisitée

Répondre à la question « Comment se débarrasser de l'habitus rétrocognitif ? » suppose que l'on réponde solidairement à une foule d'autres questions. Je précise d'abord ceci : dans une enquête, on s'appuie bien sûr, et fort heureusement, sur ce que l'on sait ou croit savoir – notamment pour l'avoir appris au cours d'enquêtes antérieures. Mais cela doit être assorti de deux spécifications complémentaires. En premier lieu, comme je l'ai déjà souligné, ce que l'on sait ne doit pas devenir l'ennemi de ce que l'on peut apprendre : chaque enquête, en effet, oblige à devenir un peu plus « savant » encore. En second lieu, on ne saurait mobiliser sans réexamen critique les connaissances antérieurement disponibles qui seraient appelées à jouer un rôle décisif dans l'enquête : chaque enquête suppose ainsi de mobiliser ce que l'on sait déjà *sous « bénéfice d'inventaire praxéologique »*. Si chaque enquête conduit à devenir un peu plus « savant », elle nous contraint aussi à devenir « savant » *autrement* que nous ne l'étions jusque-là.

Le même « inventaire praxéologique » doit évidemment être appliqué à tout contenu rencontré au cours de l'enquête. Considérons ainsi la question "If the earth were smaller would it have a less dense atmosphere?" ainsi que cette réponse rencontrée plus haut : "Yes because smaller earth means lower gravity. Lower gravity means more space between molecules. More space means lower density." Si c'était là une réponse de professeur en classe, sans doute bénéficierait-elle du privilège séculaire de l'autorité magistrale. Qu'il n'en soit rien ici, avec une réponse de quasi-anonyme, permet de voir que l'autorité accordée au *magister* hypothèque une exigence normale du travail d'enquête. *Normalement*, mis devant cette réponse, tout *X* se doit de soulever toute une série de questions. Certaines relèvent de la connaissance praxéologique : « Qu'est-ce la pesanteur (*gravity*) ? Pourquoi une Terre plus petite est-elle synonyme de pesanteur moindre (*lower gravity*) ? Pourquoi la diminution de la pesanteur terrestre entraînerait-elle “plus d’espace entre les molécules” ? Etc. » Mais dès que l’on veut approfondir la connaissance praxéologique d’une œuvre, on s’aperçoit que d’autres questions doivent être posées qui relèvent de ce que je nommerai la connaissance *didactique* de l’œuvre, c’est-à-dire la connaissance de la diffusion de l’œuvre dans la société. Cette connaissance doit répondre à des questions qui, mises dans une forme naïve mais essentielle, sont les suivantes : « Comment l’auteur de la réponse sait-il cela ? D’où cela lui vient-il ? Où l’a-t-il appris ? De qui ? Comment ? De quelles garanties dispose-t-il ? Etc. » Ce que je nommerai la *connaissance citoyenne d’une œuvre* comporte ainsi, avec la connaissance praxéologique de l’œuvre et *pour accroître cette connaissance même*, la connaissance didactique de l’œuvre, qui, en l’espèce, est plus un *moyen de l’enquête* qu’une fin en soi. Cette connaissance, on l’aura noté, est normalement *interdite* dans le paradigme de la visite des œuvres et la pédagogie de professeur, où l’on ne fait pas droit à des questions que, du même coup, les élèves se gardent de poser : « Ce qu’affirme le professeur, ou le manuel, ou le programme, par exemple, d’où cela leur vient-il ? Où, et de qui, le professeur, les auteurs du manuel, les rédacteurs du programme l’ont-ils eux-mêmes appris ? Etc. » Or on voit qu’il s’agit là d’un questionnement *essentiel* à la dialectique des médias et des milieux, notamment lorsque celle-ci doit, par exemple, maîtriser la prolifération des rumeurs en un domaine donné[10]. Dans une enquête, le *doute méthodique* est donc de mise : il en demeure l’horizon indéfiniment recommencé.

Je reformule maintenant de façon partielle et plus abstraite les questions précédentes. Cette œuvre que l’on rencontre au cours de l’enquête, de quelle discipline de connaissance participe-t-elle ? Auquel de ses grands domaines relève-t-elle ? En quel secteur ? Etc. Ce questionnement conduit à remodeler l’échelle de codétermination didactique vue plus haut. Car, ici, l’œuvre est première. Son inscription dans un champ praxéologique structuré, lorsqu’elle est possible, est seconde : elle constitue une composante du travail d’enquête lui-même. Dans l’échelle précédemment dressée, on doit donc maintenant permuter deux échelons. Alors que, dans le paradigme de la visite des œuvres, l’échelon « Œuvre » suit (en lecture descendante) l’échelon « Discipline $\leftrightarrows$ Domaine $\leftrightarrows$ Secteur $\leftrightarrows$ Thème $\leftrightarrows$ Sujet », dans le paradigme du questionnement du monde ces échelons se rangent *dans l’ordre inverse* :

[10] Le même Atelier avait antérieurement examiné une affirmation beaucoup répétée – sur Internet mais aussi dans des publications imprimées, certaines signées de noms prestigieux – quant à la durée de vie supposée d’une bouteille en plastique abandonnée dans un espace naturel. Son enquête a montré que la durée proclamée (500 ans) ne procédait très vraisemblablement d’aucune étude scientifique réelle mais constituait une estimation grossière destinée à frapper le public.

ainsi qu'il apparaît sur la nouvelle échelle de codétermination didactique représentée ci-après, on va de l'œuvre à la discipline, non de la discipline à l'œuvre :

Société

$\downarrow\uparrow$

Paradigme du questionnement du monde

$\downarrow\uparrow$

École

$\downarrow\uparrow$

Pédagogie

$\downarrow\uparrow$

Œuvre

$\downarrow\uparrow$

Discipline $\leftrightarrows$ Domaine $\leftrightarrows$ Secteur $\leftrightarrows$ Thème $\leftrightarrows$ Sujet

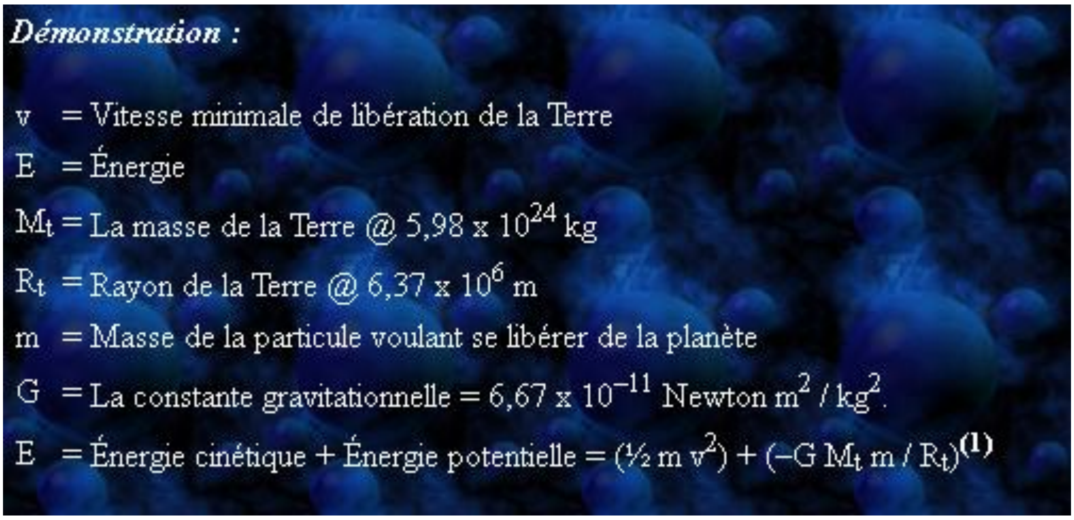
J'ajoute à cela un commentaire crucial. L'œuvre qu'évoque cette échelle peut être une œuvre au sens utilisé jusqu'ici – un calcul, une assertion, une notion, une théorie, etc. Mais ce peut être aussi une *question* : les questions ne tombent pas du ciel, elles sont fabriquées par les personnes et les institutions, ce sont des œuvres, et précieuses. Ici, l'échelon de l'œuvre intègre donc une dualité assumée : on peut y inscrire une question, ou une réponse, ou une entité quelconque supposée outiller la construction d'une réponse.

Voyons tout cela plus concrètement en revenant à l'exemple déjà amorcé, celui de la question Q_γ. Dans l'Atelier, l'enquête sur cette question s'est poursuivie par l'examen d'un document qui commence par ces lignes :

> Question : « La vie intelligente est-elle possible sur une planète (beaucoup) plus/moins massive que notre Terre ? »
>
> On sait déjà que la vie « intelligente » n'est pas possible sur des planètes plus petites que la Terre. Une plus petite planète n'étant pas capable de maintenir une atmosphère suffisante à la vie (parfait exemple : Mars).
>
> Pourquoi une planète telle que Mars ne peut-elle pas « retenir » une atmosphère viable pour le développement de vie « intelligente » ? Parce que la vitesse (résultant de la température moyenne à la surface de Mars) des particules composant une atmosphère viable surpasse la vitesse de libération de Mars (résultant de la masse et du rayon de Mars).

Je vais prouver ce dernier point physiquement en comparant tout d'abord la vitesse de libération de la Terre et celle de Mars, ensuite en montrant le rapport entre la vitesse thermique quadratique moyenne des molécules d'oxygène (la vitesse moyenne des molécules d'oxygènes si vous préférez) et la vitesse de libération des 2 planètes.

La lecture de ce document conduit ensuite au passage reproduit ci-après :



Démonstration :

v = Vitesse minimale de libération de la Terre

E = Énergie

M_t = La masse de la Terre @ 5,98 x 10^{24} kg

R_t = Rayon de la Terre @ 6,37 x 10^6 m

m = Masse de la particule voulant se libérer de la planète

G = La constante gravitationnelle = 6,67 x 10^{-11} Newton m^2 / kg^2.

E = Énergie cinétique + Énergie potentielle = ($\frac{1}{2}$ m v^2) + (–G M_t m / R_t)**(1)**

Il est facile de voir, même pour les participants à l'Atelier – pour qui tout cela n'est pas transparent, certes – qu'il s'agit là vraisemblablement de physique. De fait, une courte enquête – *que l'Atelier ne fera pas* – montre que l'auteur du document est Simon Villeneuve (2002), professeur de physique au Cégep de Chicoutimi. La suite du document, où se suivent et s'articulent de multiples calculs, n'est pas moins « dense » en boîtes noires que ce qui précède. Mais certains points peuvent être repérés. Les calculs de l'auteur conduisent à une formule censée donner la « vitesse de libération » : $v = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$. La notion de vitesse de libération n'est pas *à l'avance* connue des élèves ; et il en va de même de G, la « constante gravitationnelle ». Ce qui semble pertinent à ce propos consiste en particulier à examiner comment v dépend de la masse M. Si, dans l'expérience de pensée qu'évoque la question Q_γ, on suppose que, lorsque le rayon R de la Terre varie, la masse de la Terre reste *proportionnelle* à son volume (hypothèse qu'il conviendrait bien sûr d'interroger), qu'en résulte-t-il pour la variation de la vitesse de libération ?

Les élèves connaissent fort bien la formule donnant le volume V d'une sphère en fonction de son rayon R : $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. L'Atelier peut alors envisager le calcul suivant :

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{4\pi R'^3}{3}} = \frac{4\pi R^3}{3}\,\frac{3}{4\pi R'^3} = \frac{R^3}{R'^3} = \left(\frac{R}{R'}\right)^3.$$

Si $\frac{R}{R'} = 2$, on a donc $\frac{V}{V'} = 8$ et, par suite, $M' = \frac{M}{8}$. Un peu plus tard au cours de la séance, l'Atelier va s'intéresser à la variation de l'accélération de la pesanteur g. Si celle-ci n'est connue en 3e que par la formule $P = mg$, l'article « Pesanteur » de *Wikipédia* livre ceci :

> La première description quantitative de la pesanteur a été donnée par la loi universelle de la gravitation de Newton. La pesanteur à la distance R du centre d'un astre sphérique isolé formé de couches homogènes, et de masse totale M est dirigée vers le centre de l'astre et vaut $g = G\frac{M}{R^2}$ D'après Newton, il existe une force instantanée à distance entre deux masses m et M, valant $G\frac{mM}{R^2}$.
> $G = 6{,}674 \times 10^{-11} \cdot m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$ ou $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

En acceptant la formule $g = G\frac{M}{R^2}$ on peut maintenant envisager le calcul que voici, tout semblable à celui déjà réalisé :

$$\frac{g}{g'} = \frac{G\frac{M}{R^2}}{G\frac{M'}{R'^2}} = \frac{\frac{M}{R^2}}{\frac{M'}{R'^2}} = \frac{M}{R^2}\,\frac{R'^2}{M'} = \frac{M}{M'}\,\frac{R'^2}{R^2} = \frac{M}{M'}\left(\frac{R'}{R}\right)^2 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \times \frac{1}{4} = 2.$$

Jusque-là, on se contente, pour calculer, d'œuvres mathématiques connues. Mais il en est une que le curriculum mathématique français actuel ne connaît pas et que l'on peut trouver avantage à introduire, lorsqu'on observe que, dans les deux calculs reproduits ici – ceux de $\frac{V}{V'}$ puis de $\frac{g}{g'}$ –, « beaucoup de choses disparaissent ». Une enquête cette fois plus incertaine – on recherche une œuvre dont la nature précise nous est inconnue et dont l'existence même est improbable – peut conduire à cette œuvre qu'on peut appeler le « calcul proportionnel », dont l'emblème pourrait être le symbole $\propto$ (que l'on trouve dans la police de caractères Symbol), et dont voici comment il permet d'alléger notablement et les calculs et la conduite des calculs. Tout d'abord on a $M \propto V = \frac{4\pi R^3}{3} \propto R^3$ et donc $v = \sqrt{2G\frac{M}{R}} \propto \sqrt{\frac{M}{R}} \propto \sqrt{\frac{R^3}{R}} = R$: la vitesse de libération est proportionnelle au rayon. Ensuite, on a $g = G\frac{M}{R^2} \propto \frac{R^3}{R^2} = R$: la pesanteur est elle-même proportionnelle au rayon. Bien entendu, un examen plus sévère de cette œuvre mathématique supposée serait alors de rigueur. En l'espèce, la séance 3 des travaux dirigés qui accompagnent ce cours sera consacrée à faire connaissance – jusqu'à un certain point – avec elle : connaissance praxéologique, bien sûr, mais aussi connaissance didactique, soit donc connaissance citoyenne, c'est-à-dire, ici, connaissance *professionnelle* – par et pour la profession.

Vers un curriculum questionnant et ouvert

La transition historique vers le paradigme du questionnement du monde pose et posera à la profession des problèmes vitaux et difficiles. À cet égard, je voudrais conclure par quelques remarques très simples mais qui me paraissent utiles. On peut imaginer un curriculum remodelé selon le paradigme du questionnement du monde comme organisé autour d'un « programme » indiquant, non des œuvres à visiter, mais des questions à étudier. Si, pour reprendre une image traditionnelle qui, demain, pourrait bien devenir désuète, un professeur est inspecté, ce ne sera pas de la liste des œuvres visitées que l'inspecteur lui demandera raison mais bien de celle des questions étudiées – les autres œuvres examinées n'en étant que la conséquence (même si la cohérence de l'ensemble peut, bien entendu, être discutée). Un programme de questions aurait sans doute une structure dont un minuscule fragment pourrait *par exemple* être le suivant[11] :

Connaître le monde et les œuvres qui le constituent

↓↑

Lire et comprendre un exposé sur le monde incluant l'emploi de mathématiques

↓↑

Identifier les sources et les formes de variation d'une grandeur

On voit, au passage, que l'étude du calcul proportionnel évoqué plus haut rentre tout à fait dans l'étude de la question des sources et formes de variation. Je note en outre, comme en témoignent d'ailleurs les exemples donnés jusqu'ici, que la ligne de questionnement prise en exemple conduit à donner un rôle crucial aux *formules* (mathématiques), lesquelles sont en quelque sorte des repères, des bornes, qui désignent un avant (qu'il faudra reconsidérer) et un après (qu'il faut explorer) dans le progrès de l'enquête en cours.

Je terminerai par une observation qui répondra peut-être à certaines inquiétudes engendrée par l'habitus rétrocognitif. On dira : « Mais lorsqu'ils manient telle notion, telle

[11] Les énoncés qui suivent désignent formellement des types de tâches plus ou moins vastes. À partir de là on obtient des questions (grammaticales) en préposant à ces énoncés l'adverbe *Comment* et en leur postposant un point d'interrogation.

notation, qu'ils rencontrent au cours d'une enquête, ces élèves la connaissant-ils *vraiment* ? » Je suis désolé de donner à un souci légitime une réponse aussi triviale : mais qu'est-ce que savoir vraiment ? Considérons à titre d'exemple la constante G que l'on a croisée plus haut. On a vu qu'elle disparaît des calculs qui nous ont été utiles et *donc* que la connaissance qu'on en a semble ici non décisive. Que devrait-on donc savoir à son propos ? Que peut-on savoir ? Jusqu'à quel degré de gris faut-il descendre, en l'espèce, dans la dialectique des boîtes noires et des boîtes claires ? Dans le petit livre de Gilles Cohen-Tannoudji intitulé *Les constantes universelles* (1998), cet auteur, qui se réfère là à la formule newtonienne $F = \frac{M\,m}{r^2}$, note ceci :

> Une loi physique exprime une relation entre des quantités physiques qui ont le même contenu dimensionnel. Or, si l'on considère précisément la loi de la gravitation, on voit que dans le rapport posé il n'y a pas, des deux côtés du signe =, le même contenu dimensionnel ! Quel est en effet le contenu dimensionnel d'une force ? Il s'agit, comme nous l'enseigne l'une des premières lois de Newton, du produit d'une masse par une accélération ; donc d'une masse que multiplie une longueur divisée par le carré d'un temps. Tel se présente donc le terme de gauche de l'équation newtonienne de la gravitation. Or, lorsque l'on considère le terme qui se trouve à droite, on voit qu'il s'agit d'une masse portée au carré, puisqu'on a affaire au produit de deux masses, que divise le carré d'une longueur. Il y manque donc du temps, des masses, etc. C'est pour annuler ce déséquilibre qu'on introduit la constante G que l'on attribue à Newton, alors qu'en fait il ne l'a jamais lui-même explicitée. Elle permet de rétablir l'homogénéité du contenu dimensionnel du côté gauche et du côté droit de l'équation qui exprime en langage mathématique moderne la loi de Newton : $F = G\,Mm/r^2$ (m est la masse du corps, M la masse de la Terre et r la distance du corps au centre de la Terre). (p. 30)

Le même auteur ajoute :

> Une telle constante, on le voit, n'a pas d'abord été pensée comme une caractéristique essentielle de la nature, elle a, au stade où nous sommes de notre exposé, un contenu « utilitaire ». Elle apparait seulement comme une quantité nécessaire à la formulation mathématiquement correcte de la loi ; une quantité, de contenu dimensionnel étrange (le cube d'une longueur divisé par une masse et le carré d'un temps, $6{,}67\ 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2}$, pour être précis) dont pour le moment nous ne comprenons pas bien la signification. À vrai dire, l'introduction de cette constante ne semble, à première vue, que perturber la beauté, l'harmonie et l'élégance de la loi qui, depuis Newton, frappent tous les esprits et donnent lieu à l'essentiel des spéculations philosophiques. Un

physicien n’aime guère introduire une grandeur que semblent lui imposer les seules nécessités du calcul. (p. 31)

Et l’auteur de promettre à son lecteur que ce malaise se résoudra à la fin de son ouvrage, lorsqu’il pourra associer *G* aux constantes *c* et *h*. On verra alors, écrit-il, « que *G* acquiert une signification tout à fait surprenante, concernant la structure microscopique […] de l’espace et du temps » (pp. 31-32). En fait, il appert que la constante « opportuniste » *G* s’écrit aussi $G = \frac{l_P^3}{m_P\, t_P^2}$, où l_P, m_P, t_P sont les *unités de Planck*, ou *unités naturelles*, de longueur, de masse et de temps respectivement. Je laisserai le lecteur intéressé et ignorant de la chose enquêter là-dessus pour son propre compte. Mais faut-il savoir tout cela quand on enquête sur le rétrécissement imaginaire de notre planète ?

Bibliographie

Alain. (2011). *L’instituteur et le sorbonagre*. Paris : Mille et une nuits.

Bielak, H. (2011, 7 juin). Règle de trois : quand les ministres sèchent. *Blog de la rédaction du Monde éducation*. http://lemonde-educ.blog.lemonde.fr/2011/06/07/regle-de-trois-quand-les-ministres-sechent/

Borel, É. & Deltheil, R. (1947). *La géométrie et les imaginaires*. Paris : Albin Michel.

Bourdieu, P., Chamboredon, J.-C. & Passeron, J.-C. (1968). *Le métier de sociologue. Préalables épistémologiques*. Paris : EHESS & La Haye : Mouton.

Brink, P. (2003). Review of … *School Library Journal*. http://www.amazon.com/exec/obidos/tg/detail/-/019514743X?v=glance

Chevallard, Y. (2006, avril). La calculatrice, ce bon objet. *Les dossiers de l’ingénierie éducative, 54*, 20-25.

Chevallard, Y. (2007a). Les mathématiques à l’école et la révolution épistémologique à venir. *Bulletin de l’APMEP, 471*, 439-461. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=110

Chevallard, Y. (2007b). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Éd.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (pp. 705-746). Jaén, Espagne : Université de Jaén. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134

Chevallard, Y. (2007c). *Séminaire de didactique des mathématiques 2006*-2007 [En ligne].

http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf

Chevallard, Y. (sous presse). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Cours donné à la 15e école d'été de didactique des mathématiques (Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009).

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2009). Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture. *Recherche et formation pour les professions de l'éducation, 60*, 51-62. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=149

Chevallard, Y. & Cirade, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet et L. Trouche (Éds), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 41-55). Rennes : PUR & Lyon : INRP. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=183

Cluzel, R. & Court, H. (1951). *Algèbre*. Paris : Delagrave.

Cohen-Tannoudji, G. (1998). *Les constantes universelles*. Paris : Hachette Littératures.

Conférence des Grandes Écoles et al. (2010, 27 octobre). *La France a besoin de scientifiques* [pétition au ministre de l'Éducation nationale]. http://irem.univ-lille1.fr/PetitionLycee/

Corbin, A. (2011). *Les conférences de Morterolles*. Paris : Flammarion.

Detienne, M. *Comparer l'incomparable*. Paris : Seuil.

Etzioni, A. et al. (1969). *The Semi-Professions and Their Organization: Teachers, Nurses, Social Workers*. New York : The Free Press.

Froggatt, S. D. T. *Maths is fun* [Site Web]. http://www.mathsisfun.net/

Graversen, K. B. (2008). *Magic in mathematics I*. [Site First class thoughts] http://firstclassthoughts.co.uk/blog/kbg/math_magic.html

Graversen, K. B. (2009). *Magic in mathematics II*. [Site First class thoughts] http://firstclassthoughts.co.uk/blog/kbg/math_magic_ii_142857.html

Griffiths, H. B. & Hilton, P. (1970). *A Comprehensive Textbook of Classical Mathematics: A Contemporary Interpretation*. New York : Springer-Verlag.

Howsam, R. B. et al. (1976/1985). *Educating a profession*. Washington, DC : American Association of Colleges for Teacher Education. http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED117053.pdf

Job, P. (2011). … Université de Liège.

Kaplan, R. & Kaplan, E. (2003). *The Art of the Infinite: The Pleasures of Mathematics*. Lieu : Oxford University Press (USA).

Ladage, C. & Chevallard, Y. (sous presse). Enquêter avec Internet. Études pour une didactique de l'enquête. *Éducation & didactique*.

Lemaire, G. (1923). *Questions d'algèbre élémentaire (Homogénéité – Symétrie – Calcul rapide*). Paris : Vuibert.

Littré, É. (1872-1877). *Dictionnaire de la langue française* [En ligne] http://francois.gannaz.free.fr/Littre/accueil.php

Loisy, C., Trgalova, J. & Monod-Ansaldi, R. (2010). *Ressources et travail collectif dans la mise en place des démarches d'investigation dans l'enseignement des sciences* [Actes des journées scientifiques DIES 2010, Lyon, 24 et 25 novembre 2010]. Lyon : INRP. http://www.inrp.fr/editions/editions-electroniques/dies2010/

Macmillan Dictionary [En ligne]. (2009-2011). Macmillan Publishers Limited. http://www.macmillandictionary.com/

Marijon, A. & Pequignot, A. (1928). *Arithmétique du brevet élémentaire avec compléments pour le brevet supérieur*. Paris : Hatier.

McJob. (2011, 14 août). *Wikipedia The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/McJob

Penrose, R. (2004). *The road to reality. A complete guide to the laws of the universe*. Londres : Jonathan Cape. http://fliiby.com/file/801798/mp01yoe25r.html

Penrose, R. (2007). *À la découverte des lois de l'univers. La prodigieuse histoire des mathématiques et de la physique*. Paris : Odile Jacob.

Profession. (2011, 28 juillet). *Wikipedia The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Profession

Rey, A et al. (1993). *Dictionnaire historique de la langue française*. Paris : Dictionnaires Le Robert.

Rey, A. et al (2005). *Dictionnaire culturel en langue française*. Paris : …

Sommer, E. (1909, 17e tirage). *Petit dictionnaire des synonymes français*. Paris : Hachette.

Ruelle, D. (2008). *L'étrange beauté des mathématiques*. Paris: Odile Jacob.

Semiprofession. (2011, 6 avril). *Wikipedia The Free Encyclopedia*. http://en.wikipedia.org/wiki/Semiprofession

Schopenhauer, A. (1831/1983). *L'Art d'avoir toujours raison*. Paris : Mille et une nuits. http://fr.wikisource.org/wiki/L%E2%80%99Art_d%E2%80%99avoir_toujours_raison

U.S. Department of Education. (1997). *Mathematics equals opportunity*. Washington, DC : U.S. Government Printing Office. http://www2.ed.gov/pubs/math/mathemat.pdf

Vanderlinden, J.-P. (2011). Former des étudiants aux métiers de l'environnement [Entretien]. Dans collectif Adret (Éd.), *La révolution des métiers verts. 20 passionnés témoignent* (pp. 132-136). Paris : Éditions Autrement.

Villeneuve, S. (2002). *Planète habitable*. http://prof.cchic.ca/svilleneuve/astronomie/seti/planete_habitable.htm

Annexes

1. Douze critères d'une profession

1. Les professions rendent à la personne et à la société des services essentiels.

2. Chaque profession est attachée à un domaine de besoins bien identifié.

3. Une profession possède un corpus propre de connaissances et de savoir-faire.

4. Les décisions professionnelles se prennent en accord avec des connaissances, des principes, des théories validées et confirmées.

5. La profession repose sur des disciplines fondamentales dont elle tire son corpus de connaissances et de savoir-faire.

6. Les associations professionnelles contrôlent les conditions du travail des professionnels (par exemple l'admission dans la profession, les normes professionnelles, l'autorisation d'exercer).

7. Il existe des normes pour être admis dans la profession et pour continuer de l'exercer.

8. La préparation et l'intégration à la profession suppose une formation de longue durée, généralement à l'université ou dans une école professionnelle universitaire.

9. Le public a un haut niveau de confiance dans la profession et dans les compétences de ses membres.

10. Le praticien se caractérise par une forte motivation sociale à exercer et par la volonté de maintenir à niveau, tout au long de sa carrière, ses compétences professionnelles.

11. La profession détermine elle-même les compétences attendues de ses membres.

12. Le praticien est relativement libre vis-à-vis de tout contrôle direct ou public de son activité. Le professionnel accepte cette responsabilité en rendant compte à la société à travers la profession à laquelle il appartient.

2. Douze critères d'une semi-profession

1. Un métier de statut inférieur.

2. Des périodes de formation plus courte.

3. Une absence de reconnaissance par la société de ce que la nature du service rendu ou le niveau de compétence atteint justifie l'autonomie accordée usuellement aux professions.

4. Un corpus de connaissances et de savoir-faire moins spécialisé et moins hautement développé.

5. Une insistance nettement moindre sur les bases théoriques et conceptuelles de la pratique.

6. Une tendance chez l'individu à s'identifier à l'institution qui l'emploie plutôt qu'à la profession elle-même.

7. Une exposition plus grande à la surveillance et au contrôle de l'administration et des instances de tutelle.

8. Une moindre autonomie dans la prise de décision professionnelle et une responsabilité devant les supérieurs plutôt que devant la profession.

9. Une gestion par des personnes qui ont été elles-mêmes formées à cette semi-profession et l'ont pratiquée.

10. Un poids prépondérant des femmes.

11. L'absence d'un droit de communication privilégiée entre le professionnel et l'usager.

12. Un engagement faible ou nul dans les questions vitales.