

# Le langage en classe de mathématiques : Quels outils d'analyse en didactique des mathématiques ?

*TD associé du cours de M. Bosch et M.-J. Perrin  
C. Bulf, A.C. Mathé, J. Mithalal, F. Wozniak*

*XVI<sup>e</sup> École d'été de didactique des Mathématiques,  
Carcassonne – Août 2011*

# Présentation et organisation générale du TD



## Objectif :

Réfléchir à ce que des outils de la TSD et la TAD donnent à voir concernant le rôle et la place du langage en classe de maths, en les faisant fonctionner sur l'analyse d'un corpus.

## Organisation :

Travail en groupes sur un même corpus avec des outils théoriques et méthodologiques issus de différents cadres (TSD ou TAD) et une question commune aux deux cadres :

**Quel est le rôle et la place du langage  
dans l'activité mathématique ?**

# Présentation et organisation générale du TD



## Séance 1

Analyse *a priori* d'une situation avec outils de la TSD et outils de la TAD.  
Qu'est-ce que donnent à voir ces outils d'analyse *a priori* sur le rôle du langage dans la classe de maths ? dans l'activité mathématique ?

## Séance 2

Analyse *a posteriori* du déroulement avec les outils de la TSD et de la TAD

Le langage dans la mise en œuvre de la situation en classe

## Séance 3

Bilan, perspectives et débat

# Partie 1 : Analyse *a priori* d'une situation d'introduction à la symétrie centrale en classe de 5<sup>e</sup>

## 1) Présentation de la situation

Contexte :

- Situation de découverte de la symétrie centrale, en 5<sup>e</sup> (grade 7, élève de 12-13 ans), durée : 50min, collège parisien (17<sup>e</sup>) .
- Professeure expérimentée ayant conçu seule la séance (sources non communiquées) mais dont on peut trouver des types de tâche similaires dans des manuels de l'époque.
- Observation de type naturaliste d'une classe « ordinaire » à l'occasion d'un travail de thèse (Bulf, 2008) sur l'apprentissage et l'enseignement des transformations du plan au collège. Cette séance de classe n'a pas été transcrite à l'origine pour analyser le rôle et la place du langage.

## 2. Mutualisation d'outils d'analyse

- 
- Du Côté de la TSD ...

## 2. Mutualisation d'outils d'analyse

- **De la notion de milieu, un concept central en théorie des situations, à la structuration du milieu, modèle pour l'analyse des interactions sujet-milieu**

*(Margolinas, 2004, p.43)*

« Dans une situation d'action, on appelle « milieu » tout ce qui agit sur l'élève ou sur ce quoi l'élève agit » (Brousseau, 98, p.32)

Nécessité fondamentale du milieu comme sous-système du système didactique

- Constat : Le système didactique porte en lui-même un paradoxe : si l'enseignement réussit, l'élève doit pouvoir se passer du professeur.
- Apprentissage par adaptation de Brousseau : résoudre ce paradoxe en introduisant une situation adidactique, simulant une situation non didactique.

Dans la classe, l'élève va interagir avec un milieu système antagoniste au sujet, sur lequel celui-ci agit et générateur de rétroactions, plus ou moins semblable à celui des situations qu'il aura à affronter en sortant du système didactique.

□ **Notion de milieu utilisé à différentes échelles dans la TSD**

(Perrin-Glorian, 1999, p.285)

- « une échelle un peu globale où il s'agit de déterminer un milieu pour l'apprentissage d'un savoir, à laquelle se rattache l'idée de situation fondamentale »
- « une échelle plus locale d'étude d'une situation [déterminée et VD fixées] à laquelle se rattache la structuration du milieu ».

□ Pour notre analyse : situation didactique déterminée, v.d. fixées.

Étude plus approfondie des modalités d'interactions entre l'élève et le milieu.

Brousseau, dès 86, puis Margolinas, à partir de 93, et Bloch, 2002 : une ***structuration du milieu en niveaux de milieux***.

□ Décrire le processus d'apprentissage d'un savoir chez l'élève par l'adaptation de ce dernier à l'évolution du milieu (ou plutôt des « milieux »)

Notre but : analyser la place du langage dans ces changements de milieu pour examiner son rôle dans le processus d'apprentissage.

## □ Le modèle de la structuration du milieu

« Le **but de cette classification** en niveaux de milieu et de situations est de permettre la prévision des relations sociales – des jeux – qui correspondent aux différents régimes du fonctionnement de la connaissance dans les différents modes d'apprentissages utilisables en situation scolaire » (Brousseau 1986, p.63)

**Le modèle de la structuration du milieu**, (Brousseau (1986), Margolinas (1994)) :

- partir des systèmes en présence dans la situation didactique - le milieu, l'élève, le professeur
- considérer que « ces systèmes créent des places, dont l'analyse en termes de structuration du milieu a pour objet de caractériser des positions possibles » (Margolinas, 1995, p.94).

Le milieu : une structure emboîtée en « oignon » dont chaque couche correspondrait à un sujet distinct auquel l'élève peut s'identifier / un milieu différent avec lequel il peut interagir

## Caractérisations résumées des M-3 à 0 par Maurel et Sackur (2002)

- **Milieu matériel M-3** : les objets matériels de la situation. Doit permettre aux élèves d'entrer dans la tâche et d'agir avec leurs connaissances, mais ne comporte pas d'enjeu mathématique. La situation S-3 n'est pas une situation finalisée du point de vue des connaissances.

- **Milieu objectif M-2** doit permettre aux élèves de se poser des questions. Par action sur le milieu objectif, les élèves développent des **stratégies** et les **rétroactions du milieu** qui doivent leur permettre de valider ou d'invalider leurs actions.

Milieu objectif : les connaissances dont les élèves doivent disposer pour pouvoir interagir de façon satisfaisante avec le milieu. La situation de référence S-2 s'établit par rapport à **l'élève agissant**.

- Les stratégies développées par les élèves dans le milieu M-2 deviennent dans la situation de référence S-1 des énoncés.

**Milieu de référence M-1** : ces énoncés et des validations théoriques qu'ils peuvent recevoir, grâce aux connaissances initiales ou grâce à celles qui ont été développées dans l'interaction avec le milieu objectif.

C'est celui où « les connaissances de l'élève se transforment en savoirs (en connaissances utiles), où il saisit ce qu'il y a à comprendre – à ce niveau – de la situation ».

- **Milieu d'apprentissage M0** est un milieu pour l'institutionnalisation par le professeur. Celui-ci déclare le savoir auquel les situations précédentes ont permis d'arriver et l'inscrit dans la mémoire de la classe.

## Caractérisations résumées des M-3 à 0 par Maurel et Sackur (2002)

- **Milieu matériel M-3** : les objets matériels de la situation. Doit permettre aux élèves d'entrer dans la tâche et d'agir avec leurs connaissances, mais ne comporte pas d'enjeu mathématique. La situation S-3 n'est pas une situation finalisée du point de vue des connaissances.

- **Milieu objectif M-2** doit permettre aux élèves de se poser des questions. Par action sur le milieu objectif, les élèves développent des **stratégies** et les **rétroactions du milieu** doivent leur permettre de valider ou d'invalidier leurs actions.

Milieu objectif : les connaissances dont les élèves doivent disposer pour pouvoir interagir de façon satisfaisante avec le milieu. La situation de référence S-2 s'établit par rapport à **l'élève agissant**.

- Les stratégies développées par les élèves dans le milieu M-2 deviennent dans la situation de référence S-1 des énoncés.

**Milieu de référence M-1** : ces énoncés et des validations théoriques qu'ils peuvent recevoir, grâce aux connaissances initiales ou grâce à celles qui ont été développées dans l'interaction avec le milieu objectif.

C'est celui où « les connaissances de l'élève se transforment en savoirs (en connaissances utiles), où il saisit ce qu'il y a à comprendre – à ce niveau – de la situation ».

- **Milieu d'apprentissage M0** est un milieu pour l'institutionnalisation par le professeur. Celui-ci déclare le savoir auquel les situations précédentes ont permis d'arriver et l'inscrit dans la mémoire de la classe.

## Caractérisations résumées des M-3 à 0 par Maurel et Sackur (2002)

- **Milieu matériel M-3** : les objets matériels de la situation. Doit permettre aux élèves d'entrer dans la tâche et d'agir avec leurs connaissances, mais ne comporte pas d'enjeu mathématique. La situation S-3 n'est pas une situation finalisée du point de vue des connaissances.
- **Milieu objectif M-2** doit permettre aux élèves de se poser des questions. Par action sur le milieu objectif, les élèves doivent pouvoir développer des stratégies et les rétroactions du milieu doivent leur permettre de valider ou d'invalidier leurs actions. Le milieu objectif contient essentiellement les connaissances dont les élèves doivent disposer pour pouvoir interagir de façon satisfaisante avec le milieu. La situation de référence S-2 s'établit par rapport à l'élève agissant.
- Les stratégies développées par les élèves dans le milieu M-2 deviennent dans la situation de référence S-1 des énoncés.

**Milieu de référence M-1** : ces énoncés et des validations théoriques qu'ils peuvent recevoir, grâce aux connaissances initiales ou grâce à celles qui ont été développées dans l'interaction avec le milieu objectif.

C'est celui où « les connaissances de l'élève se transforment en savoirs (en connaissances utiles), où il saisit ce qu'il y a à comprendre – à ce niveau – de la situation ».

- **Milieu d'apprentissage M0** est un milieu pour l'institutionnalisation par le professeur. Celui-ci déclare le savoir auquel les situations précédentes ont permis d'arriver et l'inscrit dans la mémoire de la classe.

## Caractérisations résumées des M-3 à 0 par Maurel et Sackur (2002)

- **Milieu matériel M-3** : les objets matériels de la situation. Doit permettre aux élèves d'entrer dans la tâche et d'agir avec leurs connaissances, mais ne comporte pas d'enjeu mathématique. La situation S-3 n'est pas une situation finalisée du point de vue des connaissances.
- **Milieu objectif M-2** doit permettre aux élèves de se poser des questions. Par action sur le milieu objectif, les élèves doivent pouvoir développer des stratégies et les rétroactions du milieu doivent leur permettre de valider ou d'invalider leurs actions. Le milieu objectif contient essentiellement les connaissances dont les élèves doivent disposer pour pouvoir interagir de façon satisfaisante avec le milieu. La situation de référence S-2 s'établit par rapport à l'élève agissant.
- Les stratégies développées par les élèves dans le milieu M-2 deviennent dans la situation de référence S-1 des énoncés.

**Milieu de référence M-1** : ces énoncés et des validations théoriques qu'ils peuvent recevoir, grâce aux connaissances initiales ou grâce à celles qui ont été développées dans l'interaction avec le milieu objectif.

C'est celui où « les connaissances de l'élève se transforment en savoirs (en connaissances utiles), où il saisit ce qu'il y a à comprendre – à ce niveau – de la situation ».

- **Milieu d'apprentissage M0** est un milieu pour l'institutionnalisation par le professeur. Celui-ci déclare le savoir auquel les situations précédentes ont permis d'arriver et l'inscrit dans la mémoire de la classe.

# La structuration du milieu : modèle pour l'analyse des interactions sujet-milieu

Analyse ascendante - Pt de vue de E.

|   |                             |   |  |                   |
|---|-----------------------------|---|--|-------------------|
| M3 :<br>M-de construction               |                             | P3 :<br>P-noosphérien                             | S3 :<br>Situation noosphérique             | Sur<br>didactique |
| M2 :<br>M-de projet                     |                             | P2 :<br>P-constructeur                            | S2 :<br>Situation de construction          |                   |
| M1 :<br>M - didactique                  | E1 :<br>E-réflexif          | P1 :<br>P-projecteur                              | S1 :<br>Situation de projet                |                   |
| <b>M0 :</b><br><b>M-d'apprentissage</b> | <b>E0 :</b><br><b>Élève</b> | <b>P0 :</b><br><b>Professeur<br/>pour l'élève</b> | <b>S0 :</b><br><b>Situation didactique</b> | <b>didactique</b> |
| M-1 :<br>M - de référence               | E-1 :<br>E-apprenant        | P-1 :<br>P en action                              | S-1 :<br>Situation d'apprentissage         | a-didactique      |
| M-2 :<br>M-objectif                     | E-2 :<br>E-agissant         | P-2 :<br>P observateur                            | S-2 :<br>Situation de référence            |                   |
| M-3 :<br>M - matériel                   | E-3 :<br>E-objectif         |   | S-3 :<br>Situation objective               |                   |

Analyse descendante- Pt de vue de P.

- Modèle de la structuration du milieu permet une **analyse précise des positions** qui caractérisent le travail de l'élève et du professeur.

*Pourquoi?* Saisir les rapports des élèves au milieu, étudier la façon dont ils évoluent, le rôle et la place du langage dans ce processus.

- **Méthodologie pour l'observation d'une « classe ordinaire »**

Par rapport à nos objets d'étude, choix de se centrer sur l'analyse du point de vue de l'élève (*analyse ascendante*) :

- Analyse a priori des stratégies et des décisions possibles des élèves face au problème qui leur est posé
- Analyse a posteriori - le jeu des élèves avec les milieux est-il bien celui qui était prévu et en repérer éventuellement les variantes ?

Pour chaque étape, éléments d'analyse : point d'appui pour une réflexion sur ce que ces outils donnent à voir concernant la place et le rôle du langage dans la situation d'apprentissage

# Séance 1

## Analyse ascendante *a priori* : Le « point de vue » de l'élève



### Objectif :

Anticiper des comportements possibles de l'élève (générique), les connaissances susceptibles d'être mises en jeu dans la situation et fournir des références pour l'analyse a posteriori

« Se détacher du projet de l'enseignant pour envisager ce que le problème génère effectivement comme situation pour l'élève»  
(Margolinas, 2004, p.54)

en déterminant les niveaux de milieux imbriqués, du milieu matériel M-3 au milieu d'apprentissage M0 (niveaux a-didactiques).

## 2. Mutualisation d'outils d'analyse

- Du Côté de la TAD ...

## Le langage comme ingrédient praxéologique [T, τ, θ, Θ]

### Extrait du résumé du cours

La théorie anthropologique du didactique (TAD) considère le langage comme un ingrédient praxéologique important, jouant des rôles variés dans les différents composants des praxéologies :

il fait partie de **l'outillage des techniques**, à côté d'autres ostensifs comme le symbolisme écrit, les graphismes et les gestes ;

il est aussi un élément essentiel des technologies et théories, comme **outil de description, organisation, interprétation et justification** des pratiques mises en place.

## Les ostensifs dans l'activité mathématique Chevallard (1994), Bosch & Chevallard (1999)



Au commencement, des questions :

« De quoi est faite une technique donnée ?

De quels « ingrédients » se compose-t-elle ?

En quoi consiste la « mise en œuvre » d'une technique ? »

« L'observation de l'activité humaine amène à répondre en établissant une distinction fondamentale entre deux types d'objets : les **objets ostensifs**, d'une part, les **objets non-ostensifs**, d'autre part. »

« On appelle **ostensifs** les objets qui ont pour nous une forme **matérielle, sensible**, au demeurant quelconque. »

## Les ostensifs dans l'activité mathématique Chevallard (1994), Bosch & Chevallard (1999)

« Un **objet matériel** (un stylo, un compas, etc.) est un ostensif.

Mais il en va de même

- **des gestes** : nous parlerons d'ostensifs *gestuels* ;
- **des mots**, et, plus généralement, du discours : nous parlerons ici d'ostensifs *discursifs* (ou langagiers) ;
- **des schémas**, dessins, graphismes : on parlera en ce cas d'ostensifs *graphiques* ;
- **des écritures et formalismes** : nous parlerons alors d'ostensifs *scripturaux*. »

## Les ostensifs dans l'activité mathématique

Chevallard (1994), Bosch & Chevallard (1999)

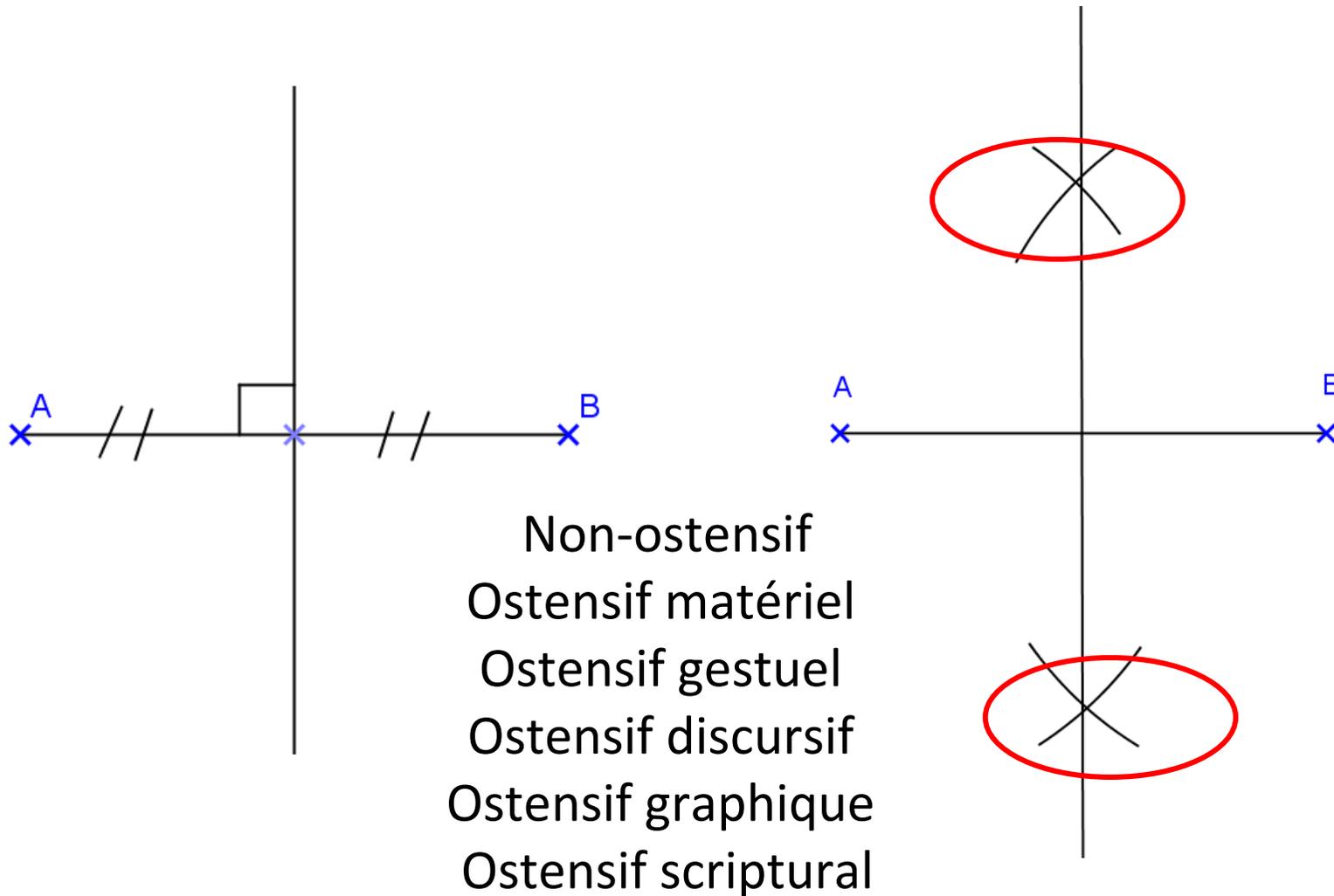


« Le propre des **ostensifs**, c'est de pouvoir être *manipulés*, ce mot étant entendu en un sens large : manipulation au sens strict (celle du compas, ou du stylo, par exemple), mais aussi bien par la voix, le regard, etc. »

« Au contraire des ostensifs, les **non-ostensifs** – soit ce que l'on nomme usuellement *notions, concepts, idées*, etc. – ne peuvent pas, à strictement parler, être manipulés : ils peuvent seulement être *évoqués*, à travers la manipulation d'ostensifs associés. »

# Les ostensifs dans l'activité mathématique

Exemple : Construire la médiatrice d'un segment donné



Non-ostensif  
Ostensif matériel  
Ostensif gestuel  
Ostensif discursif  
Ostensif graphique  
Ostensif scriptural

?

## Les ostensifs dans l'activité mathématique Chevallard (1994), Bosch & Chevallard (1999)



« Toute technique suppose l'activation d'un complexe d'objets, les uns ostensifs (ils seront manipulés), les autres non ostensifs (ils seront évoqués). »

« La manipulation des ostensifs est réglée à l'aide notamment des non-ostensifs, et ces derniers, inversement, sont évoqués à l'aide des ostensifs. »

« Il y a ainsi *une dialectique nécessaire entre ostensifs et non-ostensifs.* »

## Les ostensifs dans l'activité mathématique Chevallard (1994), Bosch & Chevallard (1999)



« Le travail mathématique *concret* (et non pas *idéalisé*) que suppose l'accomplissement d'une tâche donnée selon une technique déterminée varie en fonction du système des non-ostensifs et des ostensifs que cette technique active. »

# Questions aux participants

## Deux types de tâches

T1 Construire l'image d'une figure complexe par une symétrie axiale

T2 : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée.

## *Avec les outils de la TSD ...*

**Question 1 : *Pour chacune des tâches, faire une analyse a priori ascendante :***

- Identifier M-3  $\rightarrow$  M0
- Quels comportements possibles des élèves ? Quelles connaissances susceptibles d'être mise en jeu ? Quels apprentissages possibles ?

**Question 2 : Que peut-on prévoir, a priori, concernant **la place et le rôle du langage** dans le processus de résolution du problème ?**

# Questions aux participants

## Deux types de tâches

T1 : Construire l'image d'une figure complexe par une symétrie axiale

T2 : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée.

## *Avec les outils de la TAD ...*

**Question 1** : Expliciter l'organisation mathématique en termes de  $[T, \tau, \theta, \Theta]$  : quels sont les techniques et les discours technologiques qui les justifient qui pourraient vivre ?

**Question 2** : Lister les ostensifs qui pourraient être présents au cours de la séance en les organisant par registre (oral, graphique, écrit, gestuel, matériel).

# Questions aux participants

## *Une question commune ...*

À partir des réponses que vous aurez apportées aux 2 questions précédentes, rédiger un premier bilan sur l'analyse *a priori* réalisée sur une feuille A4.

En particulier que peut-on prévoir concernant la place et le rôle du langage dans le processus de résolution du problème ?

**Travail en groupes...**



# Le langage en classe de mathématiques : Quels outils d'analyse en didactique des mathématiques ?

## *Séance 2*

*TD associé du cours de M. Bosch et M.-J. Perrin  
C. Bulf, A.C. Mathé, J. Mithalal, F. Wozniak*

*XVI<sup>e</sup> École d'été de didactique des Mathématiques,  
Carcassonne – Août 2011*

# Bilan de la séance 1 : Analyses *a priori* du problème posé



En trois temps :

- Bilan des analyses effectuées avec les outils de la TSD
- Bilan des analyses effectuées avec les outils de la TAD
- Présentation du projet de l'enseignant : vers de premières questions pour l'analyse *a posteriori*

# Bilan des analyses effectuées avec les outils de la TSD

## Deux types de tâches

T1 : Construire l'image d'une figure complexe par une symétrie axiale

T2 : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée.

### Questions :

#### 1) *Pour chacune des tâches, Analyse a priori ascendante :*

- Identifier M-3  $\rightarrow$  M0
- Quels comportements possibles des élèves ? Quelles connaissances susceptibles d'être mise en jeu ? Quels apprentissages possibles ?

2) Que peut-on prévoir, a priori, concernant **la place et le rôle du langage** dans le processus de résolution du problème ?

## Analyse a priori ascendante

### T1 : Construction de l'image de figures par symétrie axiale

|                     |                      |  |                                |
|---------------------|----------------------|--|--------------------------------|
| <b>M-3 matériel</b> | <b>E3 – Objectif</b> |  | <b>S-3 Situation objective</b> |
|---------------------|----------------------|--|--------------------------------|

#### **Milieu matériel :**

- l'énoncé du problème
- la figure, composée de la figure « bateau » et des deux axes
- les instruments de géométrie à disposition

Les connaissances associées : celles nécessaires à la compréhension de la consigne.

Les élèves doivent donc être capables d'interpréter de façon adéquate les phrases du type « Construit la figure symétrique de F1 par rapport à la droite D », c'est-à-dire de mobiliser au moins un mode d'appréhension de la symétrie axiale.

## T 1 : Construction de l'image de figures par symétrie axiale

|                                 |                                 |  |   |
|---------------------------------|---------------------------------|--|---|
| <b>M-2</b><br><b>M-objectif</b> | <b>E2</b><br><b>E- agissant</b> |  | <b>S-2</b> <b>Situation</b> <b>de</b><br><b>référence</b> |
|---------------------------------|---------------------------------|--|---|

A ce moment de la progression, la symétrie axiale : seule transformation connue par les élèves.

### Différentes stratégies possibles

- **Procédures « globales »**

Méthodes de construction : pliage, papier calque

Résulte de la mise en œuvre des connaissances suivantes :

*Deux figures sont symétriques par symétrie axiale si elles se superposent exactement lorsque l'on plie la feuille le long de l'axe de symétrie.*

Symétrie axiale appréhendée d'un point de vue dynamique comme une transformation consistant à la restriction à un plan d'une rotation autour d'un axe dans l'espace.

Peut porter sur des surfaces, ou sur des sous-éléments de cette surface (déconstruction dimensionnelle)

- **Procédures « analytiques » ou « semi-analytiques »** (Grenier, 89)

Méthode de construction : Déconstruction dimensionnelle puis construction de l'image de chacun de ces points,

- avec équerre, règle et compas ou avec équerre et règle graduée (*déf. médiatrice*)
- uniquement au compas (*pté équidistance*)

Connaissance :

*Deux points sont symétriques par rapport à un axe si cet axe est médiatrice du segment joignant ces deux points.*

Symétrie axiale appréhendée d'un point de vue statique comme une relation entre deux « objets » du plan.

Transformation ponctuelle (ne nécessitant pas le passage par l'espace) :

- **Rétroactions**

- Validation pragmatiques possibles mais non immédiates
- Validation par enseignant
- Quel degré de précision est accepté par l'enseignant ?

|                                     |                                   |                            |  |
|-------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|--|
| <b>M-1</b><br><b>M-de référence</b> | <b>E-1</b><br><b>E- apprenant</b> | <b>P-1 : P-observateur</b> | <b>S-1</b><br><b>situation</b><br><b>d'apprentissage</b> |
|-------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------|--|

Milieu de référence : expériences vécues par les élèves - constructions validées ou non, méthodes de construction - et l'explication des définitions et propriétés de la symétrie axiale mise en œuvre.

Il pourra donc contenir :

- Procédures globales de construction (pliage ou calque) et la définition de l'image d'une figure par symétrie axiale associée de deux figures sym. par rapport à un axe.
- Procédures analytiques ou semi-analytiques (équerre-RG ou équerre-compas ou compas) et la définition associée de deux points symétriques par rapport à un axe

*Rq.: Milieu de référence déjà existant, non construit par interaction des élèves au milieu de cette situation.*

|                                     |                   |                        |  |
|-------------------------------------|-------------------|------------------------|--|
| <b>M0</b><br><b>M-apprentissage</b> | <b>E0 - Elève</b> | <b>P0 - Professeur</b> | <b>S0-situation</b><br><b>didactique</b> |
|-------------------------------------|-------------------|------------------------|--|

Situation de rappel sur la symétrie axiale et la construction du symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe : pas de réel objectif d'apprentissage.

En fait, 1<sup>ère</sup> étape permettant de construire un milieu matériel pour la tâche 2.

Il ne nous semble donc pas qu'il y ait, dans cette situation, ni milieu d'apprentissage, ni situation didactique...

**T2** : : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée.



|                                 |                      |  |  |
|---------------------------------|----------------------|--|--|
| <b>M-3</b><br><b>M-matériel</b> | <b>E3 – Objectif</b> |  | <b>S-3 – situation</b><br><b>objective</b> |
|---------------------------------|----------------------|--|--|

Le milieu matériel de cette seconde tâche est constitué :

- de la figure de l'énoncé, complétée des constructions de la situation1 : Les bateaux F1, F2, F3;
- la question : « Comment peut-on passer directement de la figure F1 à la figure F3, sans faire intervenir F2 ? »
- des instruments de géométrie à disposition

|                   |                   |  |                              |
|-------------------|-------------------|--|------------------------------|
| M-2<br>M-objectif | E2<br>E- agissant |  | S-2 – situation de référence |
|-------------------|-------------------|--|------------------------------|

### Stratégies possibles pour obtenir directement F3 depuis F1 :

- Avec calque :
  - superpositions aléatoires sans fixer O
  - le demi-tour dans le plan autour de O (stratégie visée par le professeur)
- D'autres procédures (semi)-analytiques par rapport à un axe suggéré comme une diagonale, ou bissectrice de l'angle formée ou bien impliquant O comme milieu du segment {point ; image} mais hors de portée de l'élève à ce stade de la situation.

Autres stratégies erronées envisageables :

- pointer le doigt sur le point O avec le calque puis le retourner en diagonale comme une page ;
- plier par rapport à la bissectrice de l'angle droit formé par les axes orthogonaux. ...

**Quelles rétroactions ?** Que ce soit via la consigne ou via la situation élaborée, aucune contrainte sur l'action imposant, par exemple, de ne pas décoller le papier calque de la feuille ou de n'effectuer « qu'un seul mouvement » pour aller de F1 à F3 → Une multitude de réponses à la question est donc possible...

|                       |                     |                     |                                       |
|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------------------------|
| M-1<br>M-de référence | E-1<br>E- apprenant | P-1 : P-observateur | S-1 –<br>situation<br>d'apprentissage |
|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------------------------|

**Milieu de référence** : Formulation des différentes stratégies élaborées par les élèves leur permettant, de façon effective, de passer de la figure F1 à F3 « sans passer par F2 »

Comment alors justifier la validation du demi-tour dans le plan et le rejet de tout glissement du calque ?

**Validation** devra être prise en charge par l'enseignant, éventuellement par précision du contrat ou par une intervention « mathématique » de P pour justifier cette stratégie

Justifier le passage au demi-tour ou « montrer » le demi-tour ? (dépend du projet de l'enseignant)

La situation proposée ne permet pas à l'élève de faire émerger la procédure attendue par adaptation à un milieu (pas de contrainte sur action, pas de contrainte quant à une justification mathématique)

|                                     |                   |                        |  |
|-------------------------------------|-------------------|------------------------|--|
| <b>M0</b><br><b>M-apprentissage</b> | <b>E0 - Elève</b> | <b>P0 - Professeur</b> | <b>S0 – situation</b><br><b>didactique</b> |
|-------------------------------------|-------------------|------------------------|--|

La transformation consistant à faire un demi-tour dans le plan autour d'un point est nommée symétrie centrale, le point autour duquel on tourne pour effectuer le demi-tour est le centre de symétrie.

# Bilan

*Que peut-on prévoir, a priori, concernant la place et le rôle du langage dans le processus de résolution du problème ?*

1) Le langage, un outil didactique des interactions enseignant –élève :

- Langage de l'action
- Langage de la mise en commun
- Langage de la validation : lieu de la validation (exclusif ici) et de la conclusion

2) Le rôle du langage dans le processus de construction des connaissances

L'analyse a priori en termes de structuration du milieu : la résolution du problème réside dans les changements de milieux. (Conne, 2001)

Quels observables ?

**Le langage : un indice de la position de l'élève dans le processus de résolution du problème ? un moteur dans ces changements de milieux ?**

# Bilan des analyses effectuées avec les outils de la TAD

## Deux types de tâches

T1 : Construire l'image d'une figure complexe par une symétrie axiale

T2 : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée.

**Question 1** : Expliciter l'organisation mathématique en termes de  $[T, \tau, \theta, \Theta]$  : quels sont les techniques et les discours technologiques qui les justifient qui pourraient vivre ?

**Question 2** : Lister les ostensifs qui pourraient être présents au cours de la séance en les organisant par registre (oral, graphique, écrit, gestuel, matériel).

## Situation 1

$T_1$  : Construire l'image d'une figure complexe par une symétrie axiale

- **Milieu matériel** : la fiche élève (énoncé + figure F1 + deux droites perpendiculaires D1 et D2 sécantes en O) ; les instruments de géométrie laissés libres de choix.

- ***Les tâches à accomplir***

$t_{11}$  : Construire l'image F2 d'une figure complexe (triangle, quart de cercle, trapèze) F1 par une symétrie axiale, sur papier uni, **axe vertical** parallèle à l'un des bords de la feuille, instruments géométriques non spécifiés. La figure F1 n'a pas d'axe de symétrie parallèle à l'axe de la symétrie orthogonale et qui n'est pas « coupée » par cet axe.

$t_{12}$  : Construire l'image F3 d'une figure complexe (triangle, quart de cercle, trapèze) F2 par une symétrie axiale, sur papier uni, **axe horizontal** parallèle à l'un des bords de la feuille, instruments géométriques non spécifiés. La figure F2 n'a pas d'axe de symétrie parallèle à l'axe de la symétrie orthogonale et qui n'est pas « coupée » par cet axe.

## Situation 1, praxéologies [T, $\tau$ , $\theta$ , $\Theta$ ]

- Deux grands types de techniques

Techniques par pliage :  $\tau_{1P}$

Techniques par décalque :  $\tau_{1C}$

- Un même discours technologique :  $\theta_{1PC}$

une symétrie axiale du plan est un **retournement**. C'est la restriction au plan d'un demi-tour – rotation d'angle plat par rapport à une droite dans l'espace –

## Situation 1, praxéologies [T, $\tau$ , $\theta$ , $\Theta$ ]

- Techniques en référence à la médiatrice :  $\tau_{1M}$

$\theta_{1M}$  : une symétrie d'axe D est une **transformation ponctuelle** du plan dans laquelle D est **médiatrice** de [PP'] si P' est l'image de P  $\notin$  D.

(Si  $P \in D$ ,  $P' = P$ )

- Techniques en référence à l'isométrie :  $\tau_{1I}$

$\theta_{1I}$  : la symétrie axiale est une **isométrie**, elle conserve les distances et les mesures d'angles non orientés :

Si  $X \in D$  et  $Y \in D$ , PXY et P'XY sont isométriques

# Ostensifs gestuel et graphique d'une technique & discours technologique

- Une technique, comme cas particulier de  $\tau_{1I}$ :

Construire deux points X et Y équidistants à P comme points d'intersection d'un cercle de centre P avec l'axe de la symétrie ; construire P' comme point d'intersection des arcs de cercle centrés en X et Y de même rayon que précédemment

- Deux discours technologiques  $\theta_{1I}$  ou  $\theta_{1M}$

Cette technique revient à construire P' tel que PXY et P'XY soient isométriques.

Cette technique revient à construire P' comme 4<sup>e</sup> sommet d'un losange PXYP' : les diagonales se coupent perpendiculairement en leur milieu, donc (XY) = D est la médiatrice de [PP'].

Cette technique revient à construire P' tel que X et Y soient équidistants de P et de P' et donc (XY) = D médiatrice de [PP'].

## Situation 2

T2 : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée

- **Milieu matériel** : la fiche élève (énoncé + figure F1 & deux droites perpendiculaires D1 et D2 sécantes en O) ; les instruments de géométrie laissés libres de choix ; les figures F2 et F3 construites.

**Comment peut-on passer directement de F1 à F3 ...**

- **« Passer de F1 à F3 » : 2 interprétations, 2 tâches**

$t_2$  : Déterminer une technique de **construction** de la figure F3 – obtenue comme image composée de deux symétries d'axes D1 et D2 perpendiculaires entre eux – à partir de la figure complexe F1 (triangle, quart de cercle, trapèze) donnée, sur papier uni. La figure F1 n'ayant pas de centre de symétrie et ne contenant pas le point O, intersection des axes de symétrie D1 et D2.

$t'_2$  : Déterminer un technique de **déplacement** de la figure F3 – obtenue comme image composée de deux symétries d'axes D1 et D2 perpendiculaires entre eux – à partir de la figure complexe F1 (triangle, quart de cercle, trapèze) donnée, sur papier uni. La figure F1 n'ayant pas de centre de symétrie et ne contenant pas le point O, intersection des axes de symétrie D1 et D2.

## Situation 2

T2 : Déterminer la technique de construction d'une figure à partir d'une figure complexe donnée

- 1<sup>re</sup> rencontre avec la symétrie centrale : les techniques qui pourront émergées se nourrissent des techniques connues pour la construction de l'image d'une figure par symétrie axiale qui sont rappelées en première partie et sont donc des ingrédients du milieu pour accomplir cette tâche  $t_2$  ou  $t'_2$
  
- La technique associée à cette tâche ( $t_2$  ou  $t'_2$ ) a
  - une **composante *praxis*** (le mode de production de F3 à partir de F1), *savoir faire*
  - une **composante *logos*** (discours descriptif et justificatif de la composante *praxis*), *dire le faire*.

## Situation 2, praxéologies [T, $\tau$ , $\theta$ , $\Theta$ ]

### Tâche $t_2$ (construction)

- Réinvestissement d'une technique utilisée dans la Situation 1.

«  $\tau_{1P}$  &  $\tau_{1M}$  » : impossible ou ne répondent pas au critère (sans construire F2)

$\tau_{2C}$  : décalque de la figure F1 et des axes de symétrie D1 et D2 et application deux fois successivement de  $\tau_{1C}$

### Tâche $t'_2$ (déplacement)

- Réinvestissement d'une technique utilisée dans la situation 1.

«  $\tau_{1P}$  » : impossible

$\tau_{2C}$  : permet la construction d'une figure tout en matérialisant le déplacement.

$\theta_{2C}$  : Une symétrie centrale est la composée de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires.

## Situation 2, praxéologies $[T, \tau, \theta, \Theta]$

### Tâche $t_2$ (construction)

- Adaptation par analogie d'une technique utilisée dans la situation 1

$\tau_{2m}$  : techniques en référence au milieu  $O$

$\theta_{2m}$  : une symétrie de centre  $O$  est une transformation ponctuelle du plan dans laquelle  $O$  est le milieu de  $[PP']$  si  $P'$  est l'image de  $P \neq O$  (Si  $P = O$ ,  $P' = P = O$ ).

## Situation 2, praxéologies $[T, \tau, \theta, \Theta]$

### Tâche $t'_2$ (déplacement)

- Adaptation par analogie d'une technique utilisée dans la situation 1

$\tau_{2R}$  : décalque de la figure  $F_1$  et du point  $O$  puis rotation du papier calque en prenant pour centre  $O$  d'un angle de  $180^\circ$ .

$\theta_{2R}$  : une symétrie de centre  $O$  est une rotation de centre  $O$  et d'angle  $180^\circ$ .

### Situations 1 & 2 :

$\Theta$  : l'ensemble des isométries de l'espace affine euclidien  $R^2$  (ou  $R^3$ ) forme un groupe pour la loi de composition.

## Les ostensifs par registre



- **matériel** : les instruments géométriques « incarnent » certaines propriétés  
l'alignement/la règle ;  
la perpendicularité/l'équerre ;  
l'égalité de longueur/le compas ;  
la rotation/le compas ;  
l'isométrie/le papier calque, etc.
- **graphique** : les figures construites mais aussi les traits de construction donnent à voir les techniques mises en œuvre donc les propriétés utilisées ;
- **gestuel** : l'arc de cercle se réalise avec un compas dont l'écartement constant incarne l'égalité des longueurs ; le pliage de la feuille ou le retournement du calque matérialisent le retournement géométrique ;

## Les ostensifs par registre



- **oral** : on peut supposer – dans la mesure où cette première situation vise à introduire certains éléments du milieu de la situation 2 – que les techniques de construction seront décrites (par P ou E) voire justifiées à l'issue du travail des élèves en 1<sup>re</sup> partie (situation 1). La nature de la question de la situation 2 conduit à produire (au moins pour soi-même) un discours qui rende compte d'une technique de construction ;
- **écrit** : il est probable que des écrits soient produits à l'issue de la situation 2 dans la mesure où il s'agit d'une première rencontre avec la symétrie centrale comme objet d'étude. Suivant l'OD mise en place par P, il pourrait donc y avoir des écrits comme trace écrite de phases collectives.

# Bilan

*Que peut-on prévoir, a priori, concernant la place et le rôle du langage dans le processus de résolution du problème ?*

- Dans la situation 1

Le langage est un élément essentiel de la technologie et sert d'outil de description, organisation, interprétation et justification des pratiques/techniques mises en place.

Changement de statut  
du langage.

- Dans la situation 2

La question étudiée dans la situation 2 « comment ... » vise à identifier une technique de construction ou de déplacement. Or, la figure image ayant été construite lors de la situation 1, la réponse de l'élève ne peut donc être exprimée qu'au travers d'un discours qui, *a minima*, devra décrire la technique. Le langage est d'abord un élément de la technique qui permet d'accomplir la tâche  $t_2$  ou  $t'_2$ .

Suivant l'OD mise en place, il pourra aussi être utilisé comme **élément technologique.**

# Le projet de l'enseignant

## □ Tâche 1 : Construction de l'image de figures par symétrie axiale

Objectif de l'enseignant - Réinvestissement des connaissances sur la symétrie axiale (méthode(s) de construction de l'image d'une figure par symétrie axiale)

Problème posé aux élèves - Construire la figure F2 symétrique de la figure F1 (donnée) par rapport à un axe vertical, puis F3 symétrique de F2 par rapport à un axe horizontal

Matériel disponible - Un compas, une règle graduée, une équerre, un crayon, gomme

Validation - prise en charge par l'enseignant

# Le projet de l'enseignant

- ❑ **Tâche 2** : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée.

## Objectifs de l'enseignant

- Dégager le fait que la composée de deux symétries axiales d'axes perp. est un demi-tour dans le plan autour du point d'intersection de ces axes
- Introduire la symétrie centrale comme « nouvelle » transformation du plan transformant une figure en une autre par demi-tour, dans le plan, autour d'un point.
- En déduire des propriétés de la symétrie centrale communes à la symétrie axiale (conservation formes longueurs).

Matériel à disposition Idem + papier calque (**distribué après une première phase de recherche**)

Validation prise en charge par l'enseignant

# Déroulement prévu



## Situation 1

Scène 1 : Présentation de la situation 1

Scène 2 : Travail individuel.

Validation individuelle de chaque production d'élève par l'enseignant.

## Situation 2

Scène 1 : Lecture de la consigne

Scène 2 : Échange verbal collectif

Scène 3 : Papier calque. Phase de recherche individuelle.

Scène 4 : Mise en commun, validation

Scène 5 : Formulation à l'écrit par les élèves du type :

*« J'appelle  $O$  le point d'intersection des deux axes. Pour passer de  $F1$  à  $F3$ , on peut faire un demi-tour autour du point  $O$ . Cette transformation s'appelle une symétrie centrale de centre  $O$ . »*

## *Vers l'analyse a posteriori...*



Au regard des analyses *a priori* réalisées à la séance précédente  
et du projet de l'enseignant ...

Que peut-on anticiper sur les difficultés des élèves, le rôle du professeur  
et les fonctions du langage/des ostensifs à l'œuvre au cours de la séance  
de classe ?

# Questions aux participants

## *Avec les outils de la TSD...*

1) Identifier les comportements effectifs des élèves :

Dans quelles situations (au sens du modèle de la structuration du milieu) sont les élèves ? avec quels milieux (au sens du modèle de la structuration du milieu) interagissent-ils (nature et contenus) ? Quelles sont les connaissances réellement mises en jeu ?

2) Quels observables pour identifier la nature ou le contenu de(s) milieu(x) avec le(s)quel(s) interagissent les élèves ?

3) Quel moteur de l'évolution de la nature ou des contenus des milieux ?

## Outils de la TAD pour l'analyse *a posteriori* : Les valences des ostensifs



### Extrait du résumé du cours

La prise en compte de la **valence instrumentale** des ostensifs langagiers constitue un **geste méthodologique de base** pour l'analyse de la dynamique praxéologique, aussi bien dans le cas des mathématiques que des praxéologies professorales ou de recherche en didactique.

## Les valences des ostensifs

Chevallard (1994), Bosch & Chevallard (1999)

- « Un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une valence *instrumentale* & une valence *sémiotique*. »
- « Ces deux valences apparaissant, *au sein* d'une *technique donnée*, associées comme le recto et le verso d'une feuille. »
- « Dire qu'un ostensif a une valence ***instrumentale*** signifie qu'il permet d'agir, de travailler. »
- « Dire qu'un ostensif a une valence ***sémiotique*** signifie qu'il permet de voir, d'apprécier de manière sensible, le travail *fait*, le travail en *train de se faire*, et d'envisager le travail à *faire* – et cela aussi bien pour le sujet que pour l'observateur. »

# Les valences des ostensifs

## Exemple



Un élève de CP doit calculer  $12 + 6$ .

Il égrène la comptine au-delà de 12 ...

... 13, 14, 15, 16, 17, 18

en levant un doigt supplémentaire à chaque fois.

# Questions aux participants

## *Avec les outils de la TAD ...*

**Question 1** : Expliciter l'organisation mathématique en termes de  $[T, \tau, \theta, \Theta]$  : quels sont les techniques et les discours technologiques qui les justifient qui ont vécu dans la classe ?

**Question 2** : Repérer les ostensifs présents en mettant à jour leurs valences instrumentales et leurs valences sémiotiques.

## *Question commune*

À partir de vos réponses aux questions posées, rédiger un premier bilan sur l'analyse a posteriori réalisée sur une feuille A4 (notamment du point de vue du rôle du langage)

# Le langage en classe de mathématiques : Quels outils d'analyse en didactique des mathématiques ?

## *Séance 3*

*TD associé du cours de M. Bosch et M.-J. Perrin  
C. Bulf, A.C. Mathé, J. Mithalal, F. Wozniak*

*XVI<sup>e</sup> École d'été de didactique des Mathématiques,  
Carcassonne – Août 2011*

# Troisième et dernière séance...



## 1) L'analyse *a posteriori* de la situation : mise en commun

Avec outils de la TSD

Avec outils de la TAD

→ Ce que ces outils donnent à voir concernant le rôle et la place du langage dans la situation

## 2) Débat et synthèse

# Bilan des analyses effectuées avec les outils de la TSD

## *Rappel des questions*

1) Identifier les comportements effectifs des élèves :

Dans quelles situations (au sens du modèle de la structuration du milieu) sont les élèves ? avec quels milieux (au sens du modèle de la structuration du milieu) interagissent-ils (nature et contenus) ? Quelles sont les connaissances réellement mises en jeu ?

2) Quels observables pour identifier la nature ou le contenu de(s) milieu(x) avec le(s)quel(s) interagissent les élèves ?

3) Quel moteur de l'évolution de la nature ou des contenus des milieux ?

# Bilan des analyses effectuées avec les outils de la TSD

## *Rappel des questions*

**1) Identifier les comportements effectifs des élèves :**

**Dans quelles situations (au sens du modèle de la structuration du milieu) sont les élèves ? avec quels milieux (au sens du modèle de la structuration du milieu) interagissent-ils (nature et contenus) ? Quelles sont les connaissances réellement mises en jeu ?**

2) Quels observables pour identifier la nature ou le contenu de(s) milieu(x) avec le(s)quel(s) interagissent les élèves ?

3) Quel moteur de l'évolution de la nature ou des contenus des milieux ?

# Analyse a posteriori de la tâche 1

- *1 à 14 : Lecture de la consigne (individuelle puis collective) – Interactions avec le milieu matériel, élèves en position d'élève objectif – Le langage pour contraindre le milieu objectif*

Comme prévu, **milieu matériel** de la tâche 1 : énoncé de la situation découverte, la figure - composée de la figure « bateau » et des deux axes, les instruments de géométrie à disposition ( d'abord équerre, règle graduée, compas).

Enseignante complète consigne par des instructions d'ordre technique → **action explicite sur milieu matériel**, en insistant sur les modalités de réalisation des dessins, en explicitant le matériel nécessaire :

|   |  |
|---|--|
| 9 | P : (...) Vous avez besoin <u>d'une équerre, d'une règle, éventuellement d'un crayon, d'un stylo pour repasser, d'un compas.</u> A vous de jouer. <b><u>Vous laissez les traits de construction.</u></b> |
|---|--|

Ce faisant, implicitement, par le discours, elle **aménage le milieu objectif** : oriente les élèves vers une appréhension ponctuelle de la symétrie axiale et vers « procédures analytiques ou semi-analytiques de construction » (par équerre/compas).

- **15 à 20 : Constructions individuelles du symétrique de F1, puis de F2 par rapport aux axes (Phase d'action)**

Elèves ici en **position d'élève agissant** : ils construisent l'image de F1 puis de F2 par symétries axiales.

**Milieu objectif** : techniques de construction de l'image de figures ou de points par symétrie axiale mises en œuvre et des rétroactions éventuelles du milieu.

**Procédures :**

Délicat de trancher entre une appréhension dynamique ou statique de la symétrie mais contraintes posées sur l'action des élèves (restriction du matériel à disposition, indications (orales)) : procédures ponctuelles.

Pas de **rétroaction** qui offrirait aux élèves la possibilité d'une validation interne de leurs productions (par pliage effectif par exemple), ce qui laisse le champ libre à des procédures « approximatives ».

→ Validation, *orale*, prise en charge par l'enseignante (grand nombre d'implicites : précision, procédures valides...)

- **21 à 45 : Mise en commun de méthodes de construction de l'image d'un point par symétrie axiale (Phase de formulation)**

Elèves invités par l'enseignante à formuler les méthodes de construction de l'image des figures qu'ils ont mises en œuvre :

|    |   |
|----|---|
| 21 | P : alors peut-être ça serait bien de se rappeler comment on fait <b><u>pour tracer le symétrique d'un point.</u></b> <i>Inaudible.</i> Alors on a une droite D1 [au tableau elle trace une droite D1 verticale] Alors qui pourrait me donner <u>un moyen de tracer le symétrique d'un point par rapport à l'axe ?</u> [Est également tracé un triangle quelconque du côté droit] Jonas ? |
|----|---|

P. élimine d'emblée les procédures globales et court-circuite tâche de déconstruction de la figure « bateau » en un réseau de points.

Par effet de contrat, les élèves se restreignent à la formulation de procédures analytiques.

Validation directe de l'enseignante.

Pas de réel enjeu d'apprentissage mais passage à phase de formulation pourrait marquer passage des élèves à une position d'apprenant (donc évolution du milieu objectif à un milieu de référence).

***Mais*** milieu n'invalidant pas les autres procédures, l'enseignante est contrainte de court-circuiter l'activité auto-réflexive de l'élève. **Effets de contrat, dans le discours :**

|    |   |
|----|---|
| 27 | P : On pourrait l'appeler B'. Bon alors c'est très bien. Vous avez vu comme c'est rapide au compas ?  |
| 33 | P : Mais alors ça sert à rien de prendre une équerre, tu t'en sers pas vraiment. [ <i>E a reporté les mêmes mesures mais sans se servir de l'angle droit ni tracer de droite</i> ] Oui Zacharie ? |
| 46 | P : Tous vos points doivent être transformés comme ça, on est bien d'accord.  |

**Milieu d'apprentissage artificiel** : faiblement adossé à la situation objective précédente, ne s'appuie pas sur une situation de référence/d'apprentissage permettant d'instituer les procédures valides.

*Danger : procédures mal comprises ou mal employées quand il s'agira de les réinvestir pour la résolution...*

Enseignante se place dans une situation didactique (S0), non pas pour s'appuyer sur les produits de situations S-1, S-2, S-3 que la relation didactique éclairerait, mais pour **modifier la situation objective** en apportant – d'autorité et dans le discours – de nouvelles connaissances à mobiliser, pour la rendre artificiellement **cohérente avec son projet**.

**Aucune validation d'ordre théorique** des méthodes de constructions envisagées.

**Pas de retour réflexif sur l'action**, qui pourrait permettre une justification de l'action par les définitions ou propriétés mathématiques qu'elle met en œuvre.

Validation, entièrement prise en charge par l'enseignante, dans le discours (validation d'« autorité »)

- **46 à 55 : Reformulation de la consigne puis nouvelle phase de construction individuelle (phase d'action)**

Elèves, agissant, tentent de mettre en œuvre les techniques validées par l'enseignante lors de la phase de formulation précédente.

Le milieu objectif, avec ils interagissent, a changé : stratégies de construction qui ont émergé de la mise en commun et qui ont été validées par l'enseignante.

Toutefois, ces méthodes constituent-elles des connaissances opératoires pour la tâche de construction qui leur est demandée ici ? Pas de compréhension « théorique » des méthodes, imitation de gestes...

49

*[En passant dans les rangs, on constate que beaucoup d'élèves reprennent le compas mais lors du report de l'autre côté, ils pointent sur l'axe, toujours à peu près]*

Procédures imposées ne répondent pas à une difficulté identifiée par les élèves

→ Mal réinvesties, d'autant que le milieu objectif n'offre toujours pas de rétroaction disqualifiant les procédures précédemment employées, ou témoignant du gain apporté par les nouvelles procédures.

- 56 : Conclusion et « validation » de l'enseignante

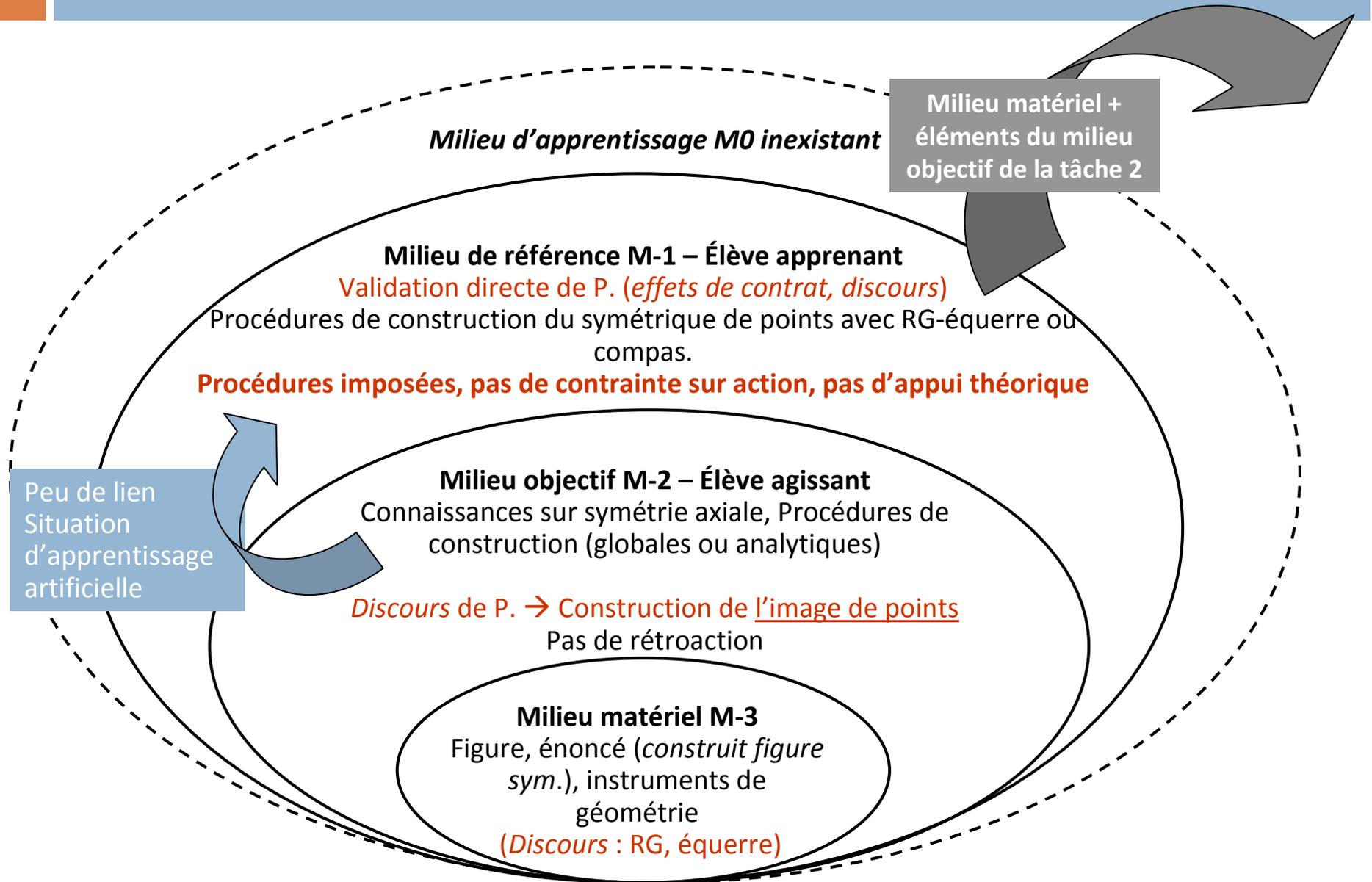
|    |  |
|----|--|
| 56 | <p>25''10 : P : alors, (...). La première transformation consiste à transformer la figure F1 en une figure F2 par rapport à l'axe D1. On est d'accord ? Vous savez faire et ce que <u>vous avez appelé l'année dernière symétrie axiale</u>. Vous <u>avez vu des techniques pour reproduire des points</u>.</p> <p>(...) Je vous signale quand même, ce n'est pas anodin que les deux axes sont perpendiculaires. <i>Inaudible</i>. Qui s'est trompé ? Elle doit être par là votre figure. [2 élèves se sont trompés de côté].</p> |
|----|--|

Conclusion et validation rapide, faute de validation donnée par le milieu. Elles portent sur des « techniques pour produire l'image de points ».

Pas d'objectif d'apprentissage (pas de milieu d'apprentissage ni de situation didactique)

But de cette tâche pour l'enseignant : première étape permettant de construire un milieu matériel pour la tâche 2.

# Synthèse analyse a posteriori tâche 1



## Analyse a posteriori tâche 2 : découverte de la symétrie centrale *D'un point de vue plus local ...*

- **Le milieu matériel** de cette seconde tâche est constitué :
  - ▣ de la figure de l'énoncé F1, complétée des figures obtenues par constructions de la tâche 1 : F2, F3
  - ▣ la question : « Comment peut-on passer directement de la figure F1 à la figure F3, sans faire intervenir F2 ? »
  - ▣ des instruments de géométrie toujours à disposition depuis la tâche 1 : équerre, règle graduée, compas
- **59-63 : (Re) formulation de la consigne par l'enseignante :**  
*P : bon alors moi j'aimerais bien voir avec ceux qui ont terminé ce schéma. Est-ce qu'ils sont capables de répondre à la question ?*

- **64 – 99 : Discussion collective autour de modalités d'action évoquées (phase de formulation)**

- Les élèves doivent imaginer des actions et leurs résultats, **sans possibilité de rétroaction émanant du milieu objectif.**
- 4 perspectives d'action, non toutes « abouties » (interprétation des liens entre les 3 figures : F1, F2, F3). L'enseignante procède à un examen des procédures spontanées des élèves en (in)validant directement ou par différents effets de contrat (et également en valorisant ou dépréciant) :
  - 67-68 : Construire une autre figure F4  
*P : Ce n'est pas très clair. Alors qui aurait une idée ?*
  - 69-78 : Tracer une droite passant par O  
*P : (...) C'est une bonne idée. Qui voit une autre méthode ?*
  - 79-88 : O est le centre de symétrie, il faut tracer une demi-droite [AO) et reporter la distance OA sur cette demi-droite, de l'autre côté de O  
*P : (...) Alors ça c'est un travail très compliqué.*
  - 89 – 99 : Réinvestir une procédure par pliage  
*P : (...) C'est une réponse comme une autre mais ce n'est peut-être pas la bonne. Louis ?*

- **La validation** par effet de contrat permet à l'enseignante d'écarter les stratégies qui ne correspondent pas à son projet d'enseignement, quand bien même celles-ci seraient parfaitement valides. **Le discours permet ici d'imposer, dans la situation de référence, certaines procédures, construisant ainsi de façon totalement artificielle le milieu de référence.**

*En effet:* Les procédures qui émergent spontanément relèvent de procédures ponctuelles (car s'inscrivent dans la continuité de la tâche 1) et ne correspondent donc au projet de l'enseignant...

- **100 – 112 : Action effective (phase d'action)**

L'enseignante introduit **dans le milieu matériel du papier calque** et ouvre une phase de recherche individuelle :

*P : et si je vous distribuais un morceau de papier calque ?*

- **Modification par l'enseignante du milieu : nouveau milieu matériel et nouveau milieu objectif** car l'introduction du papier calque oriente les élèves vers des procédures relevant d'une perception globale de la figure et la recherche de mouvement (pliage ou glissements dans le plan) permettant de passer de F1 à F3.
- **Faibles rétroactions et absence de contraintes** : une multitude de déplacements possibles (dans le plan : glissements quelconques, dans l'espace : retournements successifs) de F1 à F3.
- Elèves à nouveau en position **d'élèves agissants**, mais la **situation de référence** qui résulte de leur interaction avec le milieu objectif étant très pauvre → **La situation de référence qu'impose ensuite l'enseignante est différente et incohérente avec l'activité des élèves.**

## 113 – 158 : Émergence du demi-tour dans le plan autour de O (phase de formulation)

L'enseignante cherche à faire apparaître la symétrie centrale comme un « demi-tour autour de O » :

- Les défaillances du milieu conduisent à un **décalage entre la situation d'apprentissage attendue et le milieu de référence effectivement construit**, ce qui oblige l'enseignante à intervenir pour résorber ce décalage et
- à placer **les élèves en position d'élèves apprenants** et interroge avec eux leurs résolutions.

|     |  |
|-----|--|
| 113 | P : Vous avez vu ce qu'il a fait ? Il a retourné sa feuille. Voilà, d'accord, bonne idée. Alors.                       |
| 114 | 40''15 : P : qu'est-ce que tu fais avec ton calque ? Vous n'utilisez pas les éléments de votre dessin. Oui ? Juliette. |
| 115 | E : on renverse.   |
| 116 | P : oui, on renverse. C'est renversant cette histoire.   |

- Les élèves ne seront de fait **jamais confrontés au milieu de référence qui serait cohérent avec leur activité antérieure** ; restent **en position d'élèves agissant**, mais **ne passent pas à une situation d'apprentissage**

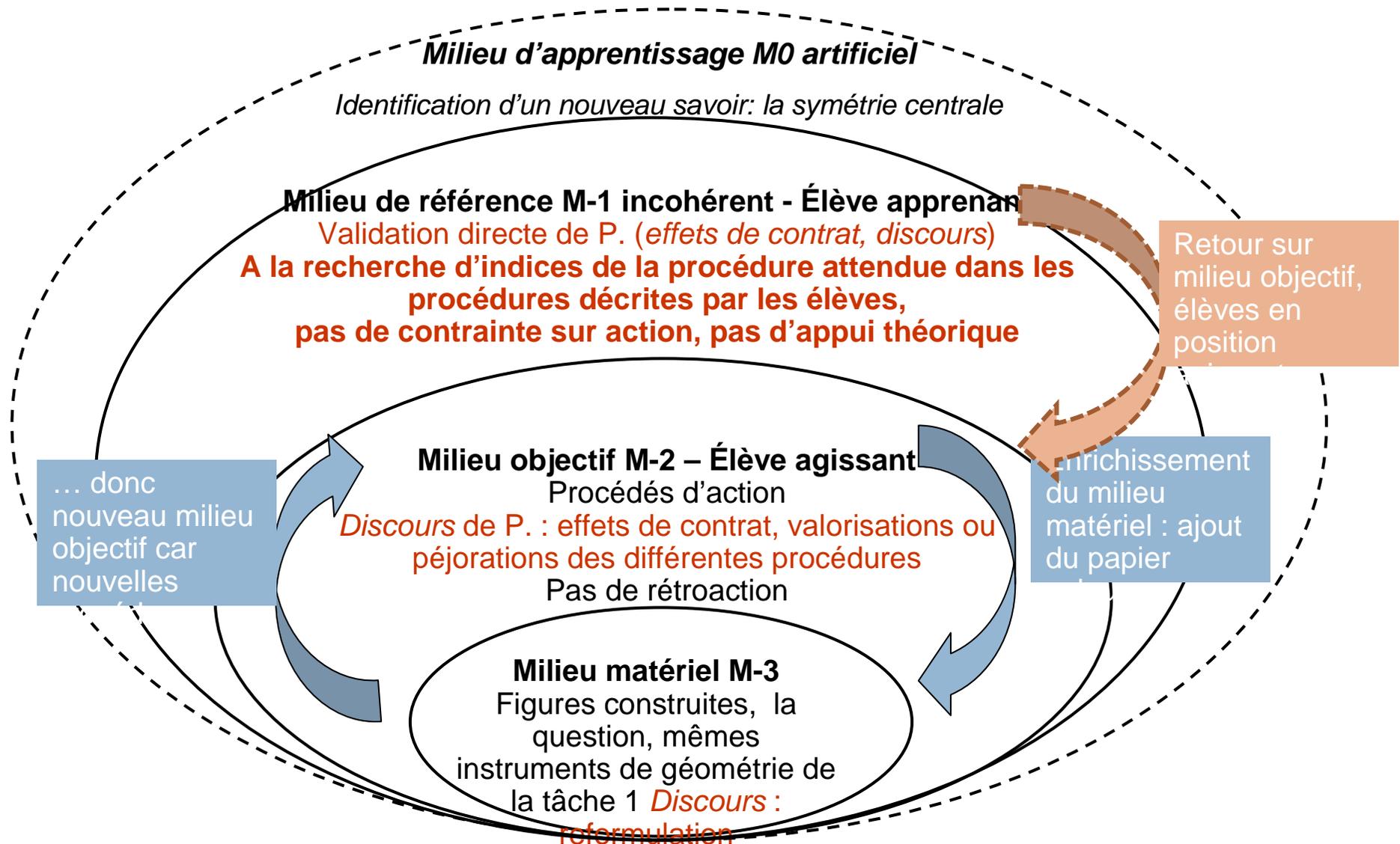
Identification finale du savoir (début d'institutionnalisation, reprise en début du cours suivant).

|     |   |
|-----|---|
| 159 | P : 360°. <i>Inaudible</i> . Oui, un demi-tour. alors voilà l'histoire, pour reproduire cette figure F1 pour qu'elle devienne la figure F3, il faut posséder un point très important, le point O, il faut tourner autour de ce point O, et tourner de 180°, c'est à dire faire un demi-tour. C'est ce que vous allez écrire en bas. |
|-----|---|

L'Amorce d'institutionnalisation finale reflète bien le malentendu général : l'enseignante ne s'appuie pas sur les procédures élèves mais sur ce qu'elle a fait émerger elle-même, et qu'elle énonce de manière très « monstrative ».

→ Mise en place d'un milieu de référence artificiel.

# Synthèse analyse a posteriori tâche 2



# Synthèse - analyse a posteriori



## *D'un point de vue global ...*

- Tâche 1 : situation d'action, sans réelle visée d'apprentissage mais dont le but est de réactiver chez les élèves des méthodes de construction propres à la symétrie axiale et de construire l'image de la figure bateau par composée de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires,
- Tâche 2 : Situation de formulation visant à expliciter le fait que l'on peut passer de F1 à F3 par un demi-tour autour du point d'intersection des axes perpendiculaires : véritable enjeu d'apprentissage de cette séance.
- Cette situation de formulation se développe en grande partie dans le langage, en appui sur l'évocation de la situation d'action précédente (construction de F2 puis F3) et sur des possibilités d'action évoquée permettant de passer de F1 à F3.

# Bilan

*Retour sur ce que le modèle de la structuration du milieu permet saisir concernant la place et le rôle du langage dans le processus de résolution du problème*

1) Le langage, un outil didactique des interactions enseignant –élève :

- Langage de l'action :

- Explicitation du milieu matériel, du problème, explicitation des consignes, fonction de dévolution ;
- Moyen pour l'enseignant de prendre des infos sur l'action des élèves (parfois besoin d'un langage pour le jeu) ;
- (parfois) Langage interne au jeu : pour *faire* des mathématiques

- Langage de la mise en commun :

- Description des stratégies lors des situations d'action et de communication ;

- Langage de la validation : lieu de la validation (exclusif ici) et de la conclusion

# Bilan

## 2) Le rôle du langage dans le processus de construction des connaissances

- L'analyse en termes de structuration du milieu
  - Le modèle de la structuration du milieu : un outil d'analyse a priori permettant de saisir les articulations possibles entre différents moments du processus de résolution.
  - « L'élève manifeste des connaissances et la structuration du milieu permet d'analyser a priori ces connaissances." (Conne 2001)
  - La résolution du problème réside dans les changements de milieux. (Conne, 2001)

## *Bilan - Le rôle du langage dans le processus de construction des connaissances (suite)*

- Quels observables ?

Le langage : un **indice de la position de l'élève** dans le processus de résolution du problème, et donc de la situation (S-3 à S0) dans laquelle il se trouve (au sens de la structuration du milieu).

Plus encore...

**Le langage : un moteur des changements de milieu permettant au processus de résolution de s'opérer**

La mise en regard des analyses a priori et a posteriori nous permet d'entrevoir le rôle central du langage dans le processus de résolution du second type de tâche :

- Milieu pauvre, l'enseignant devra poser des contraintes, dans le langage, sur les possibilités d'action des élèves pour passer de F1 à F3
- Phase de validation uniquement dans le langage
- Phase de conclusion

De façon plus générale :

- Modèle de structuration du milieu : un outil d'analyse permettant de modéliser de façon assez fine la dynamique (possible et effective) des interactions élèves-milieu permettant résolution du pb et processus d'apprentissage
- Une dynamique dont le moteur réside dans un jeu entre contraintes portée sur actions matérielles et actions langagières
  
- Pour aller plus loin ... Besoin :
  - ▣ D'un outil d'analyse conjointe de l'activité langagière et matérielle des élèves, qui pourrait les prendre en compte simultanément, sans lien de subordination;
  - ▣ A terme, de penser un outil permettant d'inclure le langage dans l'analyse a priori, en tant que composante de la situation à part entière et non comme seul indicateur.

# Bilan des analyses effectuées avec les outils de la TAD

## *Rappel des questions*

**Question 1 :** Expliciter l'organisation mathématique en termes de  $[T, \tau, \theta, \Theta]$  : quels sont les techniques et les discours technologiques qui les justifient qui ont vécu dans la classe ?

**Question 2 :** Repérer les ostensifs présents en mettant à jour leurs valences instrumentales et leurs valences sémiotiques.

## Situation 1

$T_1$  : Construire l'image d'une figure complexe par une symétrie axiale

- **Milieu matériel** : la fiche élève (énoncé + figure F1 + deux droites perpendiculaires D1 et D2 sécantes en O) ; les instruments de géométrie : équerre, règle, compas.

- ***Techniques (correctes) qui ont vécu publiquement dans la classe***

$\tau_{1I}$  : lignes 23 à 26

$\tau_{1M}$  : lignes 29 à 46

- ***Ingrédients des discours technologiques***

Limité à nommer les instruments utilisés et les verbes d'action de deux techniques de construction :

prolonger (une portion de droite), reporter (une longueur).

## Situation 2

T2 : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée

- **Milieu matériel** : la fiche élève (énoncé + figure F1 + deux droites perpendiculaires D1 et D2 sécantes en O) ; les instruments de géométrie : équerre, règle, compas + la construction des figures F2 et F3.
- ***Techniques (correctes) qui ont vécu publiquement dans la classe***

$\tau_{2m}$  : lignes 79 à 88

$\tau_{1p}$  : lignes 90 à 93

$\tau_{2R}$  : lignes 139 à 159

### ***Ingrédients des discours technologiques***

Reformulation du vocabulaire employé par les élèves :

trait vs droite; calcule vs mesure

Apport du vocabulaire :

demi-tour; centre de symétrie; symétrie centrale; rotation

## Situation 2

T2 : Déterminer la transformation du plan dans laquelle une figure est l'image d'une figure complexe donnée

- Description et justification par  $\theta_{1M}$  d'une technique de type  $\tau_{1I}$  :  
« On utilise le compas ou l'équerre. Le compas, c'est plus rapide et plus précis à partir d'un point. En traçant deux arcs de cercle, puis deux autres arcs de cercle sans changer l'écartement et vous obtenez le point symétrique. C'est le principe du tracé de la médiatrice. Hein, on est d'accord ? Puisqu'on a des points équidistants et là de la même manière points équidistants. » (ligne 163)
- Description de la technique  $\tau_{2R}$  :  
« pour reproduire cette figure F1 pour qu'elle devienne la figure F3, il faut posséder un point très important, le point O, il faut tourner autour de ce point O, et tourner de  $180^\circ$ , c'est-à-dire faire un demi-tour. » (ligne 159)

# Analyse de la dynamique praxéologique & valence instrumentale des ostensifs langagiers- Exemples

- 9, P : Vous avez besoin d'une équerre, d'une règle, éventuellement d'un crayon, d'un stylo pour repasser, d'un compas. À vous de jouer. **Vous laissez les traits de construction.**
- 18 : [En passant dans les rangs, on se rend compte que beaucoup d'élèves reportent les mesures de l'autre côté à la RG, en utilisant l'axe vertical comme repère d'origine et construisent « à peu près » parallèlement à l'axe horizontal. Très peu utilisent l'équerre et encore moins le compas].

# Analyse de la dynamique praxéologique & valence instrumentale des ostensifs langagiers- Exemples

- 19, P : Alors moi je vais vous relire la consigne orale parce que **je crois que vous n'avez pas bien ouvert vos oreilles tout à l'heure.** Écoutez-moi bien. [Assez fort et lentement en faisant des micro-pauses entre les parties de phrases] Construire en rouge la figure symétrique de F1 ... par rapport à la droite D1... La figure obtenue s'appelle F2... 2e consigne. Construire en vert la figure symétrique de F2... par rapport à la droite D2. On est bien d'accord ? 15 min 20 s.
- 88, P : De l'autre côté du point O. Sur une demi-droite qui partirait de A, passerait du point O et de l'autre côté du point O. **C'est une bonne idée. Qui voit une autre méthode ? Souvenez-vous de ce que vous avez fait l'année dernière.**

# Analyse de la dynamique praxéologique & valence instrumentale des ostensifs langagiers- Exemples

□ 91 à 100 :

P : Alors ça ***c'est une idée intéressante***. L'année dernière, on avait plié la feuille. Alors si on plie la feuille, est-ce que ça va marcher ?

E(s) : Oui.

E : Il faut plier la feuille et après il faut trouer avec le compas.

E(s) : Non, ça va pas marcher.

E : Il faut plier par le point O.

P : Alors il faut plier par le point O. Alors ça c'est un travail très compliqué.

E : Il faut tracer un autre axe de symétrie.

P : Tracer un autre axe de symétrie...

[*Légère agitation*]

P : Et si je vous distribuais un morceau de ***papier calque*** ?

## Bilan de la séance



- L'insuffisance du milieu, au regard du projet de P, a placé les élèves dans l'incapacité de fournir la réponse attendue (une symétrie centrale est un demi-tour) selon les critères d'une situation adidactique.
- P a suppléé à ce manque par un jeu de **langage** qui a joué un **rôle majeur** comme moteur de la **chronogenèse** et la **mésogenèse** et en introduisant un **ostensif matériel** – le **papier calque** – au prix d'une réduction du *topos* des élèves : P demande, E exécute.

## Bilan de la séance

- Le rôle du **papier calque** dans la **chronogenèse** et la **mésogenèse** :

**Avant son introduction** : les élèves tentaient de réaliser  $t_2$  à partir des techniques mises en œuvre pour accomplir  $t_{11}$  et  $t_{12}$ . Seule proposition d'élève formulée :  $\tau_{2m}$ .

**Son introduction** fait glisser les élèves de la réalisation de  $t_2$  à la réalisation de  $t'_2$  (enjeu de la situation 2 pour P)

**Après son introduction** : émergence de  $\tau_{2c}$  puis intervention de P et apparition de  $\tau_{2R}$

## Bilan de la séance



### **Conclusion**

- (A) Un ostensif peut perdre de son instrumentalité en perdant sa sémioticité
  
- (B) Un ostensif peut acquérir une plus grande instrumentalité par le fait d'un travail technologique ou théorique qui permet de légitimer et de contrôler de nouveaux usages techniques