MARGOLINAS Claire

Laboratoire PAEDI, IUFM d'Auvergne

UN POINT DE VUE DIDACTIQUE SUR LA PLACE DU LANGAGIER DANS LES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Mots-Clés : Didactique des mathématiques; Observations de classes; Ostensifs; Phases de conclusion; Situation de formulation

1 Quelques spécificités de la didactique des mathématiques dans le champ des didactiques

Une recherche de nécessité

Dans les recherches en didactique des mathématiques, la théorie des situations (Guy Brousseau, textes réunis dans 1998) joue le rôle fondateur de paradigme (Margolinas 1993 chapitre 1.

Guy Brousseau envisage, dès les années 70, la didactique des mathématiques comme une science expérimentale (Perrin-Glorian 1994, pages 100 à 104. Comme pour toute science expérimentale, les résultats techniques et technologiques sont normalement envisagés comme des conséquences des résultats fondamentaux. Même si l'ambition d'amélioration de l'enseignement des mathématiques est présente dans les intentions (recherche orientée, recherche appliquée, recherche de développement), l'existence et la légitimité d'une recherche fondamentale est posée, et Brousseau va y consacrer presque tous ses écrits.

Ce point de vue appelle la recherche de conditions qui permettraient *en théorie* de faire évoluer les connaissances des élèves, et non pas la recherche de conditions qui améliorent *de fait* l'enseignement. Pour réaliser le programme de cette recherche scientifique, il faut donc cerner, dans les multiples facteurs ou variables qui interviennent dans la possibilité d'apprendre, ceux qui sont nécessaires et non pas simplement suffisants. Il va donc s'agir « d'épurer » en quelque sorte la situation d'enseignement pour en «extraire » le «noyau dur », celui qui va subsister malgré les variations des conditions d'enseignement.

Épistémologie expérimentale

Pour l'ensemble des didacticiens des mathématiques, la première recherche (dans les années 70/80) va tout d'abord être celle d'une description de conditions de transmission des mathématiques. Il s'agit d'une recherche qui a des fondements fortement épistémologiques, le terme «d'épistémologie expérimentale » ayant d'ailleurs concurrencé un temps celui de « didactique ».

Par exemple, c'est en observant le travail des mathématiciens que Régine Douady (1986) va proposer les concepts de dialectique outil-objet et de jeu de cadre. De même, Guy Brousseau (dès les années 70, voir 1998) dégage au sein de l'activité mathématique trois fonctionnements fondamentaux du savoir : la dalectique de l'action, la dialectique de la formulation, la dialectique de la preuve.

Jusqu'aux années 90, la didactique des mathématiques va s'intéresser essentiellement aux propriétés intrinsèques des situations construites dans un cadre d'ingénierie, dans un fonctionnement « quasi-isolé » du maître. Il ne s'agissait pas de nier l'importance du professeur dans la relation didactique, mais en quelque sorte de minimiser le rôle du professeur comme variable, de manière à mieux étudier les situations elles-mêmes (plus précisément les situations adidactiques.

Depuis les années 90, c'est au contraire l'investigation concernant le fonctionnement « ordinaire » des classes de mathématiques et la modélisation du rôle de l'enseignant qui occupe le plus grand nombre de chercheurs.

Mais la didactique des mathématiques ne s'intéresse pas uniquement à ce qui se passe en matière d'apprentissage dans la classe, c'est à dire dans une institution particulière, mais plus largement :

> « […] la didactique des mathématiques [est] la science de l'étude et de l'aide à l'étude des (questions de) mathématiques. » Bosch et Chevallard (1999), page 79

Le rapport à l'innovation

La didactique des mathématiques française entretient un rapport qu'on pourrait qualifier de méfiant vis-à-vis de l'innovation et de la prescription. Cette réticence a des origines historiques, et notamment le choc engendré par l'échec social de la réforme des mathématiques modernes des années 70, portée par les plus grands mathématiciens de l'époque et les professeurs les plus actifs.

Ainsi les grandes ingénieries des années 80, bien qu'elles aient été répétées de nombreuses fois et sur le long terme (je pense en particulier à celles qui ont été réalisées à Bordeaux par l'équipe de Brousseau et en région parisienne par l'équipe de Douady) n'ont fait l'objet que de publications tout à fait confidentielles à l'usage des chercheurs ou des formateurs.

Les didacticiens des mathématiques restent, encore aujourd'hui, très peu présents dans les ouvrages destinés aux enseignants (manuels, ouvrages grand public.

2 Le langage et la didactique des mathématiques

Je dois tout d'abord insister sur le fait que mon propos ne peut en aucun cas constituer une synthèse sur le rôle et le statut que la didactique des mathématiques accorde au langagier, ce qui serait un travail d'une toute autre ampleur (qui n'a jamais été fait, à ma connaissance.

J'ai sélectionné trois points relatifs au langage qui pourraient représenter un apport original de la didactique des mathématiques dans le champ des sciences de l'éducation.

2.1 Les ostensifs, instruments du travail mathématique[1]

Le point de vue épistémologique de la didactique sur les mathématiques suppose que les mathématiques ne sont pas simplement un système conceptuel, logiquement consistant et producteur de démonstrations: elles sont en premier lieu une activité qui se réalise en situation et contre un milieu. Ainsi, explorer l'activité mathématique demande « […] d'examiner la manière dont *l'activité mathématique est conditionnée par les instruments matériels, visuels, sonores et tactiles qu'elle met en jeu* » (p. 90.

Ce sont ces instruments matériels de l'activité mathématique que Bosch et Chevallard nomment objets ostensifs, les opposant aux objets non-ostensifs qui ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés.

> « Les ostensifs utilisés en mathématiques sont […] très semblables, matériellement, aux ostensifs mis en jeu dans l'activité linguistique. Et, si l'on croit que, lorsqu'on parle, ce ne sont pas les mots qui importent mais ce qu'ils nous permettent de communiquer, on est de même conduit à refouler le rôle des ostensifs dans la pratique mathématique, en faisant prévaloir la dimension non-ostensive de l'activité.
>
> Lorsque, au contraire, on considère comme nous le faisons que les objets ostensifs sont […] les ingrédients premiers (et primaires) des techniques, des technologies et des théories, on peut les regarder en premier lieu comme des *instruments* de l'activité mathématique, des outils matériels sans lesquels l'action ne peut pas se réaliser. » (p. 95)

Les auteurs explorent donc l'activité mathématique en accordant une place centrale à la dialectique ostensif / non ostensif, sans privilégier, comme c'est le cas quand on adopte un point de vue idéaliste, le « sens » des concepts.

Dans cette perspective, les ostensifs matériels et sonores que sont l'écrit et l'oral ont une place particulière, car la culture (occidentale) les considère différemment, péjorant l'écrit au profit de l'oral. Les techniques écrites sont ainsi considérées comme « de simples calculs ». On se demande ainsi couramment si l'élève comprend « ce que représentent » les écritures algébriques qu'il manipule. A l'inverse, le discours et la manipulation graphique sont rapprochés du raisonnement, comme si aucune technique n'était à l'œuvre dans leur usage, qui naît ainsi comme « doué de sens ».

[1] Ce paragraphe est un résumé synthétique de l'article de Bosch et Chevallard (1999). Toutes les citations sont issus de ce texte, l'ensemble s'en inspire étroitement.

Cette opposition culturelle nuit autant aux techniques de l'écrit qu'à celles orales et graphiques :

- L'algèbre, qui s'appuie sur ces techniques écrites, prend difficilement sa place dans le cadre de la démonstration, aspect « noble » associé à la géométrie, lieu des techniques graphiques et orales, ce qui empêche l'algèbre de jouer son rôle épistémologique de formalisation de l'arithmétique.
- Les techniques orales et graphiques ne sont pas considérées comme de véritables instruments de l'activité mathématique.

En analyse, notamment, le recours au graphique des fonctions est peu travaillé, l'élève étant sensé exprimer « naturellement » sa pensée sous la forme graphique. La construction des techniques graphiques est presque complètement à la charge de l'élève.

2.2 Complexité des phénomènes langagiers en phase de conclusion

Les mathématiques accordent épistémologiquement une place particulière à la notion de vrai et de faux (voir Margolinas 1993 pour des développements concernant l'ensemble de ce paragraphe. Le tiers exclu y occupe une place fondatrice et essentielle, contrairement à d'autres disciplines, scientifiques ou non.

C'est sans doute une des raisons qui font que ce que j'ai appelé les *phases de conclusion*¸ y jouent un rôle aussi important. En mathématiques, quelle que soit la méthode d'enseignement, les problèmes jouent un rôle essentiel, les élèves résolvent toujours des problèmes plus ou moins complexes. La phase de conclusion est une phase au cours de laquelle l'élève reçoit une information sur le caractère de vérité de sa réponse. Dire « recevoir » ne signifie pas nécessairement que c'est le professeur qui informe l'élève, dans certaines situations, il peut aussi y avoir rétroaction du milieu. Pour donner un exemple très simple, si un élève de fin d'école primaire doit reconstruire un puzzle géométrique en respectant certaines conditions, il peut se rendre compte par lui-même du fait que les pièces qu'il a produites ne forment pas un puzzle.

J'ai ainsi distingué un peu brutalement les phases d'évaluation, dans lesquelles le professeur statue sur la réponse de l'élève et les phases de validation, dans lesquelles c'est une rétroaction du milieu qui permet à l'élève de connaître la validité de sa réponse. Je ne m'attarderai pas ici sur ces définitions et leur usage, pour me centrer spécifiquement sur la complexité des phénomènes langagiers en phase de conclusion.

Si nous adoptons le point de vue du chercheur qui met en place des moyens d'observation dans une classe ou bien qui analyse les données recueillies, le problème peut être de pouvoir dire de quelle nature est une phase de conclusion, c'est à dire de déterminer par quel moyen l'élève accède à une information sur la validité de sa réponse. J'ai appelé « point de vue de la validation » cette démarche un peu particulière, qui conduit à s'intéresser à la résolution de problème quand une réponse a déjà été donnée.

L'article fondateur concernant la complexité de l'observation du rôle du professeur est celui de Arsac et Mante (1989, voir aussi Arsac, Balacheff et Mante 1992. Ils décrivent le problème de la prise en compte du rôle du professeur. Leurs observations montrent notamment qu'une intervention mineure, anodine sur le plan du contenu, comme par exemple :

> «(P) : Bon ça y est ? Il est au point ce message ?
>
> (E) : Oui, c'est mieux.
>
> (P) : Vous pouvez peut-être commencer déjà à l'écrire, hein, vous pouvez commencer déjà à l'écrire » (page 86)

peut avoir des conséquences très importantes sur le fonctionnement d'un groupe de travail (dans le cas ci-dessus, le groupe, en plein débat contradictoire, abandonnera celui-ci au profit d'une rédaction qui ne permettra pas de dépasser le conflit.

Les cas qui sont décrits dans l'article se fondent sur un protocole obtenu dans une classe à l'occasion d'un débat mathématique. Cette pratique de débat, même si elle n'est pas unique dans cette classe, n'est pas une pratique quotidienne. Le phénomène en jeu ici demande à être interprété dans le contexte de la communication en classe : le contrat didactique y règle, de façon tacite, les interactions entre le professeur et les élèves.

Le contrat détermine ainsi les places du professeur et l'élève. Si la place de l'élève est de proposer une solution et celle du professeur de l'évaluer, alors toute intervention du professeur sur la solution d'un élève sera interprétée en fonction de cette place. L'influence des caractéristiques particulières de la situation et les intentions du professeur ne suffiront pas à transformer ces places quotidiennes. Les élèves, même dans cette situation de débat ouvert, chercheront donc à lire une évaluation de leur solution, non seulement dans le discours mais dans tous les gestes de l'enseignant, pris au piège du contrat didactique quotidien.

Au passage, ce type de phénomène permet de comprendre que les expérimentations en didactiques ne puissent être que des ingénieries sur le long terme, ce qui pose des problèmes méthodologiques importants.

Mais un autre problème se pose, qui concerne les phases de conclusion : le professeur est, comme l'élève, lié par les propriétés des situations qu'il met en place (voir Margolinas 1992 pour un exemple très détaillé de ce phénomène. Pour qu'une phase de validation puisse exister, il faut qu'un milieu pour la validation existe, dont la rétroaction soit lisible pour les élèves. Étudier les échanges en phase de conclusion ne peut donc se faire indépendamment d'une étude des propriétés de la situation dans laquelle sont plongés les élèves. C'est ici l'existence d'un milieu et son analyse qui sont nécessaires à l'analyse des interactions de classe.

Analyser les discours dans le contexte de la classe sans prendre en compte ces dimensions me semblent ne pas tenir compte du contexte spécifique de l'interaction didactique. Certaines observations (Goigoux, Margolinas et Thomazet, à paraître) montrent que des Maîtres-Formateurs font de même, isolant certaines réponses comme le « non » hors du contexte spécifique créé par le milieu et le contrat, produisant entre eux des malentendus professionnels forts.

2.3 Situations de formulation

Guy Brousseau (1998[2]) considère trois formes de connaissances (dans le contexte des mathématiques) : Il insiste (page 99) sur le fait que d'autres approches sur les formes de connaissances existent, mais qu'elle oppose d'une façon générale une forme plus explicite et mieux assumée et une forme plus implicite, comme dans l'opposition « déclaratif » et « procédural », par exemple. Au contraire Brousseau « [y ajoute] une composante plus strictement linguistique : les codes et langages qui contrôlent les formulations ». Les formes de connaissances, pour Brousseau, sont donc :

> « (i) […] [celles] qui permettent de « contrôler » explicitement les interactions du sujet relativement à la validité de ses déclarations, sont principalement ses savoirs exprimables et reconnus comme tels par le milieu. Ils sont organisés en théories, en démonstrations et définitions bien déterminées sous leur forme culturelle la plus achevée. […]
>
> (ii) La formulation des descriptions et des modèles […] est réglée par un tout autre type de code. Même si la théorie des langages permet d'unifier la construction d'un énoncé et la démonstration d'un théorème, le recours constant, dans l'activité mathématique, à la langue naturelle et à toutes sortes d'autres types de représentations tels les dessins ou les graphes, exige de distinguer pour eux des codes et des modes de contrôles propres.
>
> (iii) Les différents types de représentations ou les théorèmes en actes [voir Vergnaud 1990] qui régissent les décisions du sujet ne sont pas très faciles à identifier […]. Mais […] les régularités de comportements meuvent donner un accès à ce type de « modèles implicites ». (pages 100-101)

Chaque forme de connaissance est associée à une structure de situation adidactique, qui rend *nécessaire* l'usage d'une forme de connaissance, nous allons détailler (figure 1) la structure de la situation de formulation.

[2] Republication d'un article publié en 1986 dans la revue *Recherches en didactiques des mathématiques* (n°7.2).

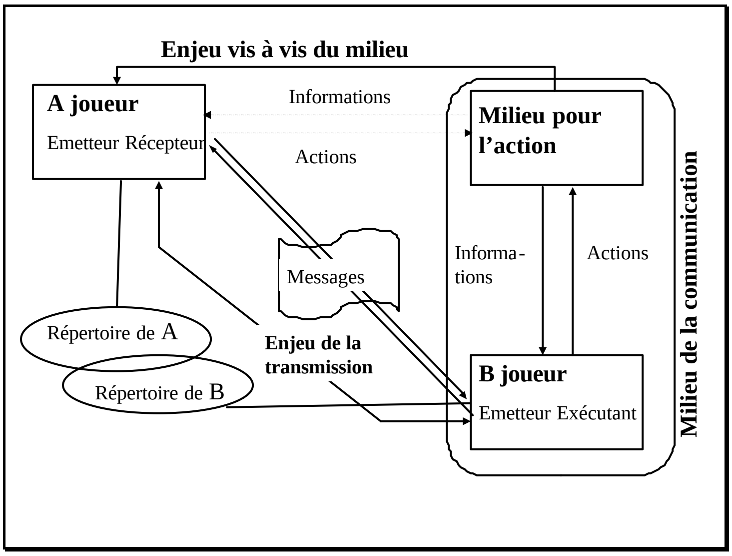

Figure 1 : Situation de formulation (Brousseau 1998, page 106)

Ce schéma un peu complexe mérite quelques explications. On doit noter tout d'abord la dissymétrie de l'environnement du « joueur A» et du « joueur B » les flèches en pointillées tracées entre le joueur A et le milieu pour l'action indiquent que A ne peut avoir accès au milieu pour l'action, par contre, il a un enjeu vis-à-vis de ce milieu. Au contraire, le joueur B peut agir sur le milieu pour l'action. C'est seulement par le détour de la communication avec B que A peut agir sur le milieu pour l'action. C'est pourquoi c'est l'ensemble « joueur B – milieu pour l'action » qui est le « milieu de la communication ».

L'exemple paradigmatique de cette situation est celui d'une « joueuse A » étourdie appelant, au téléphone depuis son lieu de travail un «joueur B» (son compagnon, par exemple), parce que A souhaite que B retrouve son carnet d'adresse oublié à la maison et dans le carnet d'adresse, un numéro de téléphone… Dans cette situation, ce qui est importe c'est que A doit communiquer avec B pour obtenir l'information nécessaire. De son côté, B n'a pas les mêmes enjeux sur le milieu, il est en position d'exécutant et ne cherche qu'à réaliser l'action communiquée par A. Les différences des répertoires de connaissance entre A et B peuvent rendre cette action médiée par la formulation difficile, à la fois pour A et pour B.

La situation de formulation représente une charnière essentielle entre la situation d'action, et la situation de preuve. Mais il ne s'agit pas seulement d'une succession temporelle : ces situations se présentent sous une forme « emboîtée » que l'on peut schématiser comme dans la figure 2 (nous reviendrons sur ce point dans les exemples.

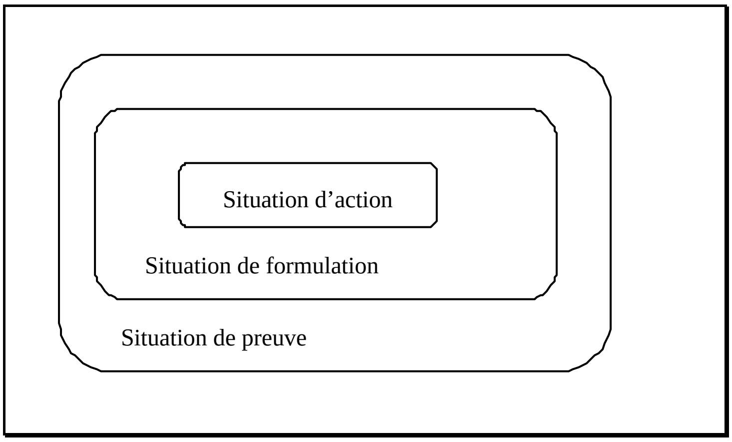

Figure 2 : emboîtement des situations d'action, de formulation, de preuve

3 Situations de formulation et pratiques d'enseignement

3.1 Multiplicité des formes de situations de formulation

L'exemple paradigmatique du « téléphone » a parfois occulté la multiplicité des formes de situations de formulations. En didactique des mathématiques, la suite de situations qui en constitue un modèle est celle de la « course à 20 » (Brousseau 1998, pages 25-44. Le jeu de base (jeu à deux joueurs), qui permet la situation d'action est le suivant :

> « Il s'agit, pour chacun des adversaires, de réussir à dire « 20 » en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par l'autre ; l'un commence, dit 1 ou 2 (exemple : 1), l'autre continue, ajoute 1 ou 2 à ce nombre (2 par exemple) et dit « 3 » ; à son tour le premier ajoute 1 ou 3 (1 par exemple), il dit 4, etc… » (Ibid. page 25)

Il s'agit d'un jeu à deux joueurs, et pourtant ce n'est pas une situation de formulation. Les mots utilisés (nombres entiers) ne constituent aucun enjeu cognitif, ils interviennent ici comme des « jetons » dans un jeu reposant sur un matériel.

La situation de formulation associée à ce jeu est la suivante :

> « *Phase 3 : Jeu à une équipe contre une équipe (6 à 8 parties, 15 à 20 mn)*
>
> Les enfants sont partagés en deux équipes. […] Chaque élève pourra être appelé [au hasard] à défendre son équipe au tableau dans une partie que tout le monde verra ; s'il gagne, il apportera un point à son équipe. » (Ibid. page 26)

Il s'agit d'une situation de formulation car :

> « Pour gagner, il ne suffit pas qu'un élève sache jouer (c'est-à-dire qu'il ait un modèle implicite) mais il doit indiquer à ses coéquipiers quelle stratégie il propose : c'est le seul moyen d'agir sur la situation à venir. Donc chaque élève est conduit à anticiper, c'est-à-dire à prendre conscience des stratégies qu'il utiliserait […].
>
> Son seul moyen d'action est de formuler ces stratégies. Il est soumis à 2 types de rétroactions :

- une rétroaction immédiate (lors de la formulation) de la part de ses interlocuteurs qui lui témoignent qu'ils comprennent ou ne comprennent pas sa suggestion.
- une rétroaction de la part de la situation (du milieu) lors de la prochaine partie jouée si la stratégie formulée et appliquée est gagnante ou non. » (Ibid. page 35

On retrouve l'élément constitutif de la situation de formulation : l'élève ne peut agir sur la situation que par l'intermédiaire de la communication. Cette nécessité de la communication pour l'action est vraie aussi bien pour l'élève « émetteur » qui souhaite communiquer une stratégie au groupe que pour l'élève «récepteur » qui écoute celle-ci et cherche à se l'approprier.

Mais on retrouve également l'inclusion de la situation d'action dans celle de formulation : le jeu existe dès la phase d'action, mais il est toujours présent, dans la situation de formulation, puisque la communication a pour enjeu la réussite d'un élève de l'équipe « le champion » dans le jeu de l'action. On n'est pas dans un schéma où après avoir « manipulé » il s'agirait maintenant de « décrire les manipulations » ni dans un autre dans lequel après avoir « agit », on explicite les mobiles de son action.

La situation de preuve qui suit s'appuie sur la situation de formulation : recherche des règles permettant de gagner à coup sûr. La formulation des règles prend un caractère collectif de recherche de nécessité. Cette situation inclut la situation de formulation : la règle doit permettre de gagner à tout coup si on l'emploie comme «champion » de l'équipe, mais également la situation d'action : on peut jouer pour éprouver la validité de la règle ou pour l'invalider.

3.2 Une situation de formulation dans une pratique expérimentale et ses effets

J'ai construit une séquence, au collège (niveau 4ème, troisième niveau de l'enseignement secondaire, élèves de 13-14 ans), en utilisant la structure de la situation de la course à 20, dans le cadre de l'enseignement de l'inégalité triangulaire. Il s'agit de la première leçon sur ce thème, cette notion n'ayant pas été abordée précédemment dans cette classe.

Sans rentrer dans les détails de cette situation, il s'agit ici de montrer l'évolution des écrits depuis la phase d'action (dans laquelle l'écrit est uniquement adressé au professeur, il ne s'agit pas d'une situation de formulation) à la phase de formulation, dont l'organisation est identique à celle de la « course à 20 ». Le problème posé a une même structure dans toutes les phases : « Est-il possible de construire un triangle dont les côtés on pour mesure *x* cm, *y* cm, *z* cm » les nombres *x*, *y*, *z* sont des nombres entiers qui varient selon les questions posées. Dans la phase d'action, le premier triplet (7, 8, 9) permet la construction d'un triangle, alors que le deuxième triplet (2, 1, 6) ne le permet pas. Dans la phase de formulation, les élèves qui «défendent leur équipe » au tableau sont prévenus qu'ils ne disposeront pas d'instrument de construction géométrique (de type compas, règle, etc.), mais pourront emporter au tableau une feuille rédigée par le groupe à leur usage (la désignation des élèves qui iront au tableau se fait au dernier moment et au hasard, comme dans la course à 20, la feuille à emporter au tableau n'est donc pas construite pour l'élève d'un usage en particulier).

Dans la phase d'action, pour le premier triplet (triangle constructible) 18 élèves sur 26, à la question « Pourquoi donnes tu cette réponse », disent simplement qu'ils ont pu construire le triangle, parmi ceux qui cherchent une justification, 6 élèves sur 8 donnent une justification du type

> « Je pense que si on donne toujours 3 mesures on pourra toujours construire un triangle » (Fouad)

une seule élève émet un doute sur la constructibilité :

> « J'ai quand même été obligé de faire la construction de ce triangle car je n'étais pas sûre que l'on pouvait en faire un avec pour mesures 7cm, 8cm, 9cm » (Stéphanie)

Pour le deuxième triplet (triangle non constructible), 11 élèves sur 26 donnent encore comme seule justification le fait qu'ils n'aient pas pu construire le triangle, 4 élèves sur 15 cherchent à exprimer une relation entre les longueurs des côtés comme par exemple

> « Je donne cette réponse car il y a deux mesures qui sont très petites par rapport à l'autre » (Céline D)

Deux élèves donnent une formulation de l'inégalité triangulaire (Lyria et Fabrice.

Dans la phase de formulation, les premières « feuilles à emporter au tableau » révèlent une recherche des conditions de constructibilité, qui n'aboutit à l'inégalité triangulaire dans trois groupes sur 7 (dont le groupe de Fabrice, mais pas celui de Lyria. Dans le groupe 2, la feuille révèle une évolution des formulations :

> Pour qu'on puisse faire un triangle, il faut avoir des nombres assez rapprochés les uns des autres ou deux nombres plus grands que l'autre.
>
> Il ne faut pas avoir un grand écart entre chaque nombre.
>
> Il ne faut pas qu'il y ait deux petites mesures et une grande.
>
> Il faut que l'écart soit en dessous de 10cm.
>
> Il faut que le total des deux petites mesures soit égal ou supérieur à la grande mesure. (groupe 2 : Céline, Émilie, Laetitia, Mouna),

Les deuxièmes «feuilles à emporter au tableau » révèlent une formulation de l'inégalité triangulaire, sauf dans deux groupes sur 7 (le groupe 4, qui cherche encore les conditions

adéquates à la construction, et le groupe de Fabrice, qui a été perturbé par la construction d'un triangle « aplati » qu'il a considéré comme un contre-exemple à l'inégalité triangulaire[3].
Les types de formulation sont très différents : formulations données en toute généralité, comme ci-dessus, ou sur un exemple générique:

> 10, 7, 2. Si on soustrait par exemple 10-7=3 donc 2 ne va pas car il est plus petit (groupe 3 : Caroline, Sandrine)

ou encore celles dans lesquelles l'inégalité triangulaire apparaît au détour d'une formulation qui n'est pas aboutie :

> Un triangle avec les dimensions 7, 10 et 2cm est impossible à faire. Vérification: 10-7=3>2. Pour que le triangle soit réalisable, il faut qu'il y ait comme dimension 10, 7 et 3 ou plus. car ces dimensions sont trop éloignées. (groupe 1 : Aurélie, Eduarda, Maxime, Stéphanie)

Au début de la phase de validation, tous les groupes sont invités à « chercher une règle sur les nombres qui permet de décider à tous les coups ». Tous les groupes aboutissent alors à des formulations de l'inégalité triangulaire[4] :

> 15-10=5
> 8 est plus grand, donc on peut faire ce triangle. Il faut soustraire les deux plus grandes dimensions et il faut que le troisième côté soit plus grand que le reste de la soustraction. (Groupe 1)
>
> Pour pouvoir construire un triangle, il faut que le total des deux plus petits nombres soit égal ou supérieur au plus grand nombre parmi les trois données. La construction est alors possible. Ex: 10, 6, 7 -> possible; 7, 3, 2 -> impossible. (Groupe 2)
>
> Si on soustrait les deux plus grandes mesures d'un triangle, le résultat doit être supérieur ou égal à la troisième mesure de ce triangle. (Groupe 3)
>
> Pour construire un triangle, il faut soustraire les deux plus grands nombres et le résultat doit être inférieur ou égal à la troisième mesure. Dans ce cas là, on peut construire le triangle. (Groupe 4)

Cette pratique expérimentale montre que des élèves peuvent, dans un temps compatible avec le temps scolaire (moins de 50 minutes) aboutir à une formulation de l'inégalité triangulaire, mais que celle-ci demande un véritable travail, et n'est en rien « naturelle ». La situation de formulation donne ici un sens à la règle, que la simple confrontation avec les constructions géométriques n'induit pas pour la plupart des élèves.

---

[3] Je ne peux rentrer ici dans les détails, la question de la valeur stricte ou large de l'inégalité triangulaire, qui met en jeu celle du triangle aplati, était l'objet de la phase suivante de la séquences.

[4] On notera que dans tous les groupes, l'inégalité triangulaire est formulée au sens large, la question du triangle « aplati » ne se pose dans un premier temps.

Dans le paragraphe suivant, je décrirai quelle pratique usuelle prend la place des situations de formulation, je questionnerai son efficacité au regard des résultats obtenus en situation expérimentale.

3.3 Problèmes de diffusion des situations de formulation dans le système d'enseignement

Situations de formulation et pratiques ordinaires

Mes observations des pratiques ordinaires d'enseignement des mathématiques, aussi bien à l'école primaire qu'en collège et lycée montrent que les situations de formulation (dans le sens de nécessité qui est donné à cette expression dans la théorie des situations) sont quasiment absentes.

Dans les manuels scolaires, on trouve parfois, en fin d'école primaire et début du collège, des problèmes de type « message au téléphone », essentiellement en géométrie, dans la communication de figure. Ce sont à ma connaissance les seules situations de formulation que l'on trouve dans les ouvrages destinés à l'enseignement. Dans la réalité des classes, ces situations sont assez rarement reprises par les enseignants (en tout cas ceux qui sont loin des prescriptions des instituts de formation), de plus, il s'agit souvent de situation de formulation évoquée, dans lesquelles le joueur récepteur est virtuel.

Dans la situation que j'ai développée au paragraphe précédent, ce qu'on pourrait rencontrer dans les pratiques du collège à l'heure actuelle serait de ce type : dans une première phase, on pourrait avoir une situation d'action tout à fait semblable à celle de la situation expérimentale, mais celle-ci aboutirait directement à une « phase de bilan » dans laquelle le professeur formulerait la règle avec l'aide des élèves. Dans la classe observée, nul doute que Lyria et Fabrice auraient alors aidé le professeur (voir Mercier 1998) dans la tâche de formulation. Pour les autres élèves, la formulation d'une règle intervient dans ce cas sans qu'aucun problème que celle-ci puisse résoudre n'ait été posé. On peut donc s'interroger sur le caractère potentiellement différentiateur d'une pratique dans laquelle l'action est tès rapidement formulée dans un débat collectif. En effet, dans un tel débat, le professeur n'est en fait confronté qu'aux formulations des élèves les plus rapides, qui ont en quelque sorte anticipé la nécessité d'une expression des régularités de l'action. Même si le professeur ne sélectionne pas immédiatement les meilleures formulations dans la phase de bilan et laisse les élèves s'exprimer, cette pratique masque l'absence de travail de formulation de la majorité des élèves qui n'ont fait, au fond, que ce que le professeur leur a demandé individuellement : agir.

Une observation en classe de CP

Une observation très récente en classe de CP m'amène à formuler quelques hypothèses sur les raisons de la stabilité de cette pratique d'enseignement. En effet, mon propos n'est pas de stigmatiser les pratiques des professeurs, mais de comprendre d'une part leurs effets mais aussi les motifs de leur stabilité.

Les deux professeurs (Martine et Michel) observés sont maîtres-formateurs, expérimentés. Ils enseignent au CP et utilisent, en mathématiques, le manuel ERMEL[5]. L'observation porte, à un an d'intervalle, sur la même séquence de ce manuel « les maisons »[6]. Après un jeu collectif (première séance de 45 minutes), les élèves sont invités à jouer en petits groupes (deux joueurs, un arbitre, 45 minutes), un bilan et une évaluation sur feuille sont ensuite réalisée (le maître expliquant les consignes au tableau au fur et à mesure, 45 minutes). Les maîtres constatent que les enfants entrent très volontiers dans la tâche des deux premières phases, mais beaucoup d'entre eux restent incapables de répondre correctement aux question de l'évaluation. Les maîtres s'interrogent sur la difficulté de l'évaluation, alors qu'apparemment « tout va bien ».

Cet exemple correspond à la forme usuelle : action (collective et en petit groupe), bilan collectif, aucune phase ne peut être analysée comme une situation de formulation. Le problème posé aux élèves se présente au départ comme une sorte de « jeu de l'oie », avec un dé et une piste, en tombant sur la case correspondante, on récole des cartes représentant des étages, des toits ou des rez-de-chaussée. Pour construire le plus de maison possible (qui est le but du jeu), les enfants peuvent utiliser des règles d'échanges entre des cartes représentant des parties de maisons : un rez-de-chaussée vaut deux étages, alors qu'un toit vaut cinq étages.

Plusieurs remarques s'imposent. Tout d'abord on remarque que l'habillage du jeu est complexe, et même un peu trompeur. Dans le jeu de l'oie, que la plupart des enfants connaissent bien, c'est le premier arrivé qui gagne (on voit d'ailleurs les enfants crier de joie à l'annonce d'un six), alors que dans le jeu des maisons, il vaut mieux récolter des cartes « toit » ou «rez-de-chaussée » qui valent plus que les «étages ». Pour construire une maison, il faut un rez-de-chaussée, un étage et un toit, les enfants pensent donc au départ qu'il est mieux, quand on a déjà un rez-de-chaussée et un toit, recevoir étage, sans prendre en compte les règles d'échange. Ces difficultés pourraient être un intérêt du jeu, dans la mesure où il serait possible de prévoir une variante dans laquelle un choix judicieux (par exemple entre les valeurs de deux dés, ou en introduisant une valeur au choix sur l'un des faces du dé) permettrait aux élèves de récolter des cartes de plus grande valeur, mais ceci n'est prévu ni dans le manuel ni dans les classes observées.

Le maître accueille (dans les deux classes) toutes les suggestions des enfants concernant les échanges, par exemple, si une équipe possède cinq étages et un rez-de-chaussée (la

[5] INRP, Hatier éditeur.

[6] Il s'agit d'une situation d'échange, voir plus loin.

maison est donc impossible à construire), le maître accepte d'échanger les cinq étages contre un toit puis de redonner à la demande cinq étages contre ce toit récemment acquis, sans porter de jugement. Certains élèves s'aperçoivent que ce nouvel échange ne sert à rien et qu'il n'y a plus rien à faire, mais d'autres s'obstinent, ce qui est possible puisque les échanges successifs ne « coûtent » rien, il n'y a donc pas véritablement d'enjeu à l'anticipation. Là encore, une variante du jeu qui introduirait un nombre d'échange à ne pas dépasser, par exemple ou un enjeu à la déclaration d'impossibilité de construction, permettrait de peser sur les décisions d'échanges successifs, mais ce n'est pas prévu.

Au sujet des deux problèmes soulevés, certains élèves ajoutent en quelque sorte d'eux-mêmes ces dimensions au jeu, alors que d'autres s'en tiennent à ce qui est véritablement demandé et admis par le maître (il y a des Lyria et des Fabrice dans toutes les classes….

Après ces quelques remarques, qui ont pour but de montrer en quelque sorte la potentialité du jeu proposé mais aussi les enjeux de la compréhension des échanges, revenons à la situation telle qu'elle est proposée, dont l'objectif est de s'approprier et d'utiliser une règle d'échange.

La première année d'observation, dans les deux classes, les maîtres introduisent dès la première phase la règle d'échange à la fois à l'oral et par une affichette (figure 2), dans laquelle, pour qui sait la lire, sont symbolisés les échanges réversibles entre les différentes cartes.

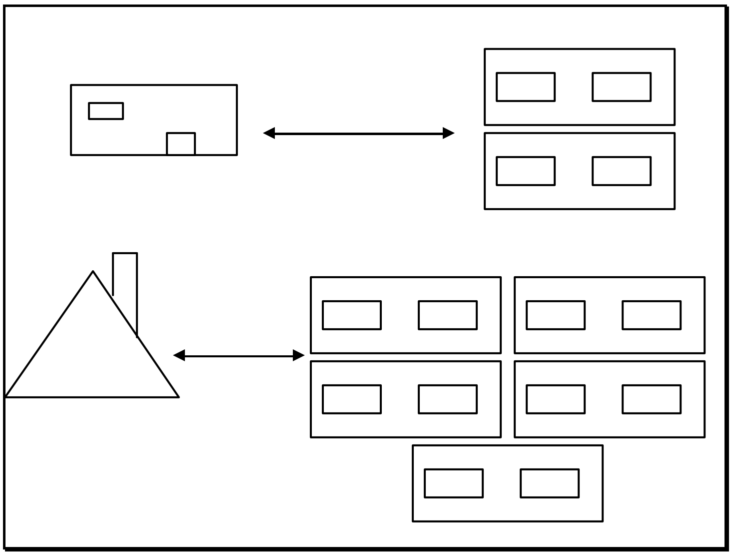

Figure 2 : affiche des échanges

Une fois cette affiche introduite, le problème change un peu, puisqu'il s'agit également de savoir lire et utiliser l'affiche.

La deuxième année, Martine, influencée par mon analyse rapide de la situation mettant en évidence la nécessité d'une phase de formulation, procède[7] à un certain nombre de modifications dans la situation, et notamment n'introduit pas l'affiche des échanges. Les enfants ont *dès le départ* de grandes difficultés à envisager les échanges, ce qui était invisible jusque là, et ne devenait patent qu'au moment de l'évaluation. L'introduction de l'affiche avait donc masqué la difficulté des élèves, ne la révélant qu'à la fin.

En reprenant les enregistrements, on s'aperçoit que l'affiche est utilisée constamment par les maîtres, qui aident les élèves en difficulté en pointant sur les cartes correspondantes : « toit » « 5 étages », etc. L'affiche sert donc un effet Topaze (Brousseau 1998) qui transforme la situation, de l'usage d'une règle d'échange à la lecture de la représentation de l'affiche pointée par le doigt du maître. Bien sûr la situation « sans l'affiche » est plus difficile, surtout pour le professeur, qui doit alors faire face, dès le début, aux problèmes des élèves, que le jeu ne permet pas de problématiser.

Dans la deuxième version, à l'issue de la première phase de jeu collectif, Martine organise une phase de bilan (sans doute seul moyen installé dans la profession de réaliser une formulation) dans laquelle elle demande collectivement aux élèves comment ils pourraient représenter les échanges pour jouer plus facilement le lendemain.

Un des élèves en difficulté dans la compréhension des échanges produit alors l'affiche représentée en figure 3, qui montre à quel point l'affiche introduite au départ par les maîtres n'est pas « transparente » pour l'élève, et ne fonctionne que grâce au doigt du maître qui pointe sur les bons éléments à voir.

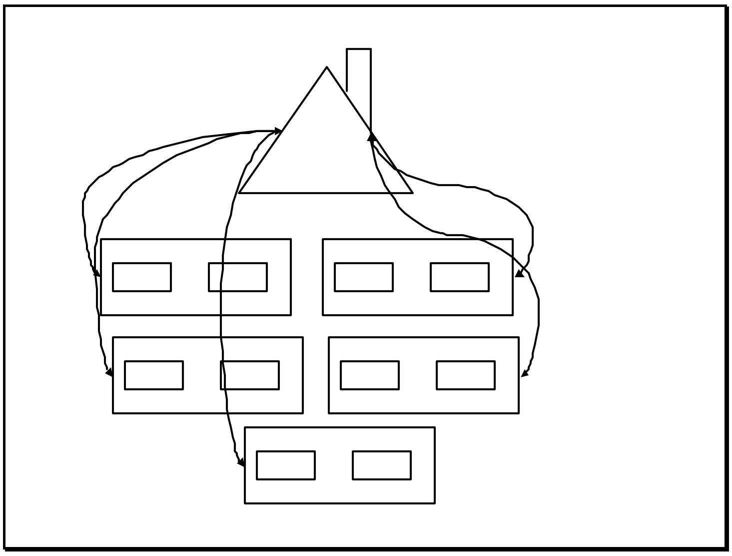

Figure 3. essai de représentation des échanges par un élève en difficulté

[7] La préparation de la leçon, qui a lieu 6 mois après mon analyse rapide, est faite par Martine sans aucune intervention de ma part. Martine et Michel travaillent ensemble mais dans le cas présent Martine se démarque de Michel et change sa préparation.

Dans la situation observée, la formulation des relations d'échange est (dans la première version) entièrement du côté du maître, et sert un effet Topaze. La situation est plus simple pour le professeur, qui n'a pas à gérer les difficultés des élèves dans cette situation qui peut être simplifiée par un simple geste dès la moindre difficulté d'un élève. Par contre, l'apprentissage des échanges est ainsi repoussé, pour les élèves qui prennent au pied de la lettre les situations introduites, et finit par être à leur charge, ce qui les met en échec au moment de l'évaluation.

4 En guise de conclusion

En mathématiques, l'attention au détail des ostensifs en jeu dans la communication permet de révéler des fonctionnements ou des dysfonctionnements dans les échanges en classe. La question du langagier doit être prise dans un sens très large, au risque de perdre de vue le contexte de la communication : contrat didactique, milieu.

La naturalisation des registres graphique et oral joue sans doute un rôle dans l'évitement des situations de formulation dans les pratiques de classe ordinaires, alors que ces pratiques, sans être révolutionnées, pourraient inclure cette dimension. Les observations de situations expérimentales montrent que la formulation demande un véritable travail cognitif spécifique, qui ne se réduit pas à une sorte de « traduction langagière » de l'action. En mathématique, ce travail est d'autant plus important que l'accès à la preuve ou à la démonstration, fondamental dans cette discipline, prend appui sur la formulation.

Les ostensifs graphiques, notamment, doivent être examinés avec attention, car leur association avec des gestes du professeur peuvent conduire à des effets Topaze qui modifient subrepticement la situation pour les élèves les plus en difficulté, ne les confrontant finalement à la difficulté de l'apprentissage qu'au moment où il est trop tard.

Un programme de recherche pourrait s'attacher de façon complémentaire à la fois à décrire les pratiques des professeurs en matière de formulation, mais également à construire des ingénieries qui permettraient une meilleure diffusion de ces situations dans l'enseignement ordinaire. Ces ingénieries seraient à mon avis d'autant plus intéressantes qu'elles modifieraient moins les pratiques usuelles, tout en les rendant compatibles avec la nécessité des formulations, d'où la nécessité de tenir les deux bouts de ce programme : description et construction.

REFERENCES

ARSAC G. et MANTE M. (1988) *Le rôle du professeur. Aspects pratiques et théoriques, reproductibilité*, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique,* n°101, Grenoble : LSD-IMAG

ARSAC G, BALACHEFF N., MANTE M. (1992) Teacher's role and reproducibility of didactical situations, *Educational Studies in Mathematics, 23, pp. 5-29*, Dordrecht: Kluwer.

BOSCH M. et CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématiques aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 19, n°1 (pp.77-124), Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, vol 7 n°2 (pp. 33-115), Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (1995) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, in Noirfalise R. et Perrin-Glorian M.J. *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de didactique des mathématiques* (pp. 3-46), Clermont-Ferrand : IREM.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La pensée sauvage.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7 n° 2 (pp. 5-31), Grenoble : La pensée sauvage.

GOIGOUX R. , MARGOLINAS C. , THOMAZET S., accepté, Analyse de l'activité d'enseignement : étude clinique des pratiques d'enseignement de la lecture et des mathématiques de maîtres-formateurs, *Bulletin de psychologie*

MARGOLINAS C., 1992, Analyse de situation et analyse du rôle du maître sur un cas particulier, *Séminaire de l'équipe DidaTech* n°138, pp. 185-205, LSDD, IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

MARGOLINAS C., 1993, *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*, 255p., ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MERCIER A. , 1998, La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18 n°3 pp. 279-310, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

PERRIN-GLORIAN M-J., 1994, *Théorie des situations didactiques: naissance, développements, perspectives,* in ARTIGUE Michèle et coll. eds, 1994, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,* pp. 97-147, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.