Le langage dans les situations et les institutions

Essai de croisement de points de vue TAD et TS

Marianna Bosch, Universitat Ramon Llull

et

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Laboratoire de didactique André Revuz, Université d'Artois

Introduction

Notre exposé vise à apporter des réponses aux questions suivantes, en nous référant aux recherches menés en TS et en TAD :

- Où se situe le langage dans les conceptualisations proposées par chaque approche ?
- Quel est son statut et quel rôle joue-t-il dans les différentes modélisations de l'activité mathématique ?
- Comment sont traités les discours et les échanges langagiers ? En quels termes ? Pour mettre en évidence quels types de phénomènes ?

Plan de l'exposé

1. Le langage et les mathématiques
2. Le langage et les situations
3. Le langage et les institutions
4. Conclusions

Le langage et les mathématiques

- Omniprésence du langage aussi bien pour faire des mathématiques que pour les enseigner
- Le discours verbal est présent dans les énoncés et dans les pratiques mathématiques
- On l'utilise aussi pour communiquer au cours de l'activité mathématique, ou de l'activité didactique :
  - Sur l'activité mathématique elle-même
  - Sur les relations entre les acteurs et l'activité mathématique
  - Sur les relations entre les acteurs à propos de l'activité mathématique (moyen d'enseignement-apprentissage)

Le langage et les mathématiques

- La « langue mathématique » (Laborde, 1982) est faite d'une combinaison de symboles (écrits pouvant s'oraliser), de mots spécifiques, de mots de la langue courante utilisés avec un sens spécifique, de la langue courante mais avec un usage spécifique de la syntaxe
- Dans l'activité mathématique il y a :
  - Imbrication de la « langue mathématique » et de la « langue courante »
  - Interaction avec d'autres *objets ostensifs* : figures, tableaux, graphes, dispositions spatiales particulières, matériel qu'on manipule, gestes…

Le langage et les mathématiques

- La différence entre *dire* et *faire* est un des points de départ de la TS (dialectiques de l'action, formulation, validation, connaissances/savoirs, notion de situation). La production de discours mathématiques est prise en compte plus spécifiquement dans les situations de formulation
- En TAD, le langage intervient dans les *praxéologies* et s'appréhende, plus particulièrement, à travers la notion *d'objet ostensif,* composante matérielle des praxéologies

Le langage et les mathématiques

- **Objet ostensif :** objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, perceptible pour le sujet humain et « manipulable » (au sens large)
  - Sons (en particulier les ostensifs langagiers)
  - Écriture et formalismes (ostensifs scripturaux)
  - Schémas, dessins, graphismes (ostensifs graphiques)
  - Gestes
  - Objets matériels autres

Registres ostensifs

- **Objets non ostensifs** (concepts, notions idées, etc.) : objets que l'on ne peut pas manipuler mais qui peuvent être évoqués par la manipulation d'ostensifs associés.

Le langage et les mathématiques

- **Dialectique entre ostensifs et non-ostensifs :** Les objets non ostensifs émergent de la manipulation régulière et réglée d'ostensifs
La manipulation d'ostensifs est réglée par des non-ostensifs (et d'autres complexes d'ostensifs)
Ostensifs et non-ostensifs sont indissociables

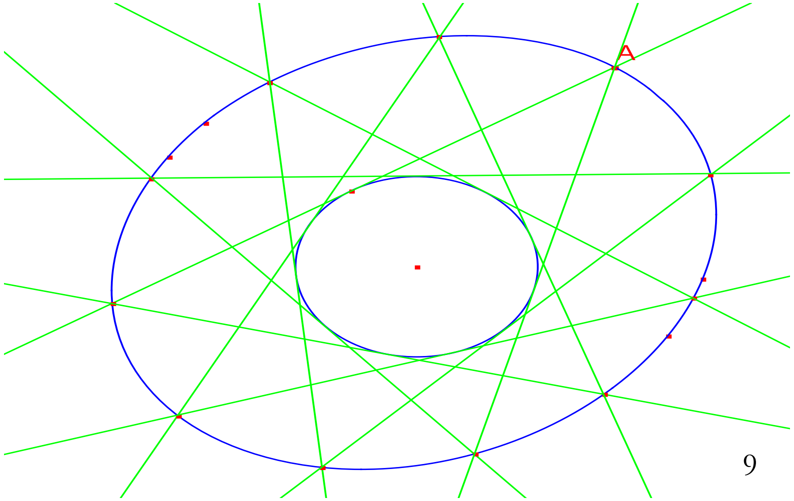
- Il y a généralement co-activation d'une **diversité de registres ostensifs** (oralité, écriture, graphique, gestuel, matérialité, etc.) dans les activités humaines

Exemple de l'oralité et l'écriture, le gestuel, etc.

Grand théorème de Poncelet

- Enoncé de Poncelet (1813, publié en 1862) :

Il est impossible, généralement parlant, d'inscrire à une courbe donnée du deuxième degré un polygone qui soit en même temps circonscrit à une courbe de ce degré, et quand la disposition particulière de ces courbes sera telle que l'inscription et la circonscription simultanée soient possibles pour un seul polygone essayé à volonté, il y en aura, par là même, une infinité jouissant de cette propriété à l'égard des coniques données.



Enoncé moderne

Lignes de Poncelet

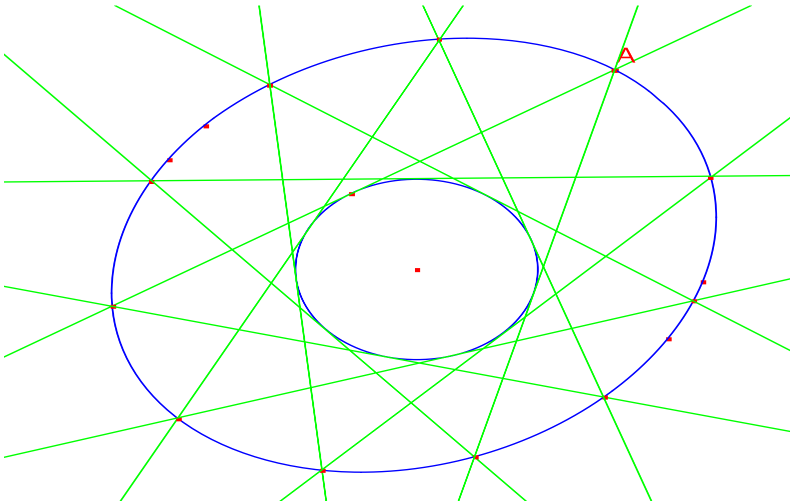
Soient Ω et C deux coniques propres du plan projectif.

On appelle **ligne de Poncelet** inscrite dans Ω et circonscrite à C une suite de points $a_i \in \Omega$ ($i \in \mathbf{Z}$) tels que, pour tout i, les droites $(a_i a_{i-1})$ et $(a_i a_{i+1})$ soient les deux tangentes à C issues de a_i.

Une telle ligne est dite **périodique** de période $n \in \mathbf{N}^*$ si l'on a $a_i = a_{i+n}$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Grand théorème de Poncelet

S'il existe une ligne de Poncelet inscrite dans Ω et circonscrite à C qui soit périodique de période n, toutes les lignes de Poncelet associées à Ω et C sont périodiques de période n.



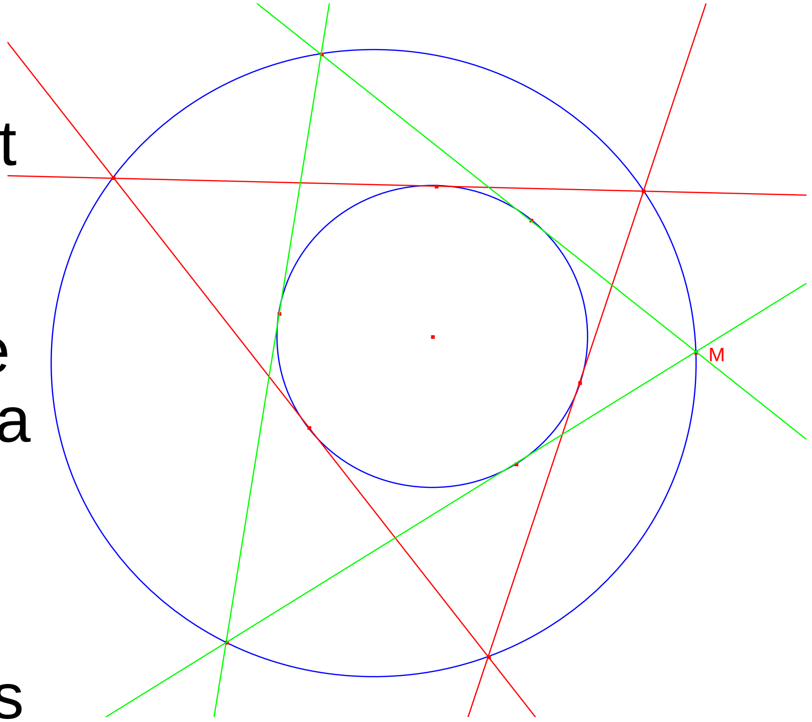
Les énoncés mathématiques

- Les énoncés évoluent avec l'évolution de la langue mathématique et celle du domaine dans lequel ils prennent place, on a vu l'exemple du théorème de Poncelet dans le temps.
- De plus, la formulation des énoncés reflète et induit un point de vue sur les mathématiques qui y sont énoncées. Ils peuvent être équivalents du point de vue logique sans l'être du point de vue de ce qu'ils suggèrent.
- Par exemple, en géométrie, il reflètent et induisent un certain regard sur la figure et favorisent ainsi certaines orientations plutôt que d'autres pour la démonstration ou pour les relations avec d'autres énoncés.

Autour du grand théorème de Poncelet

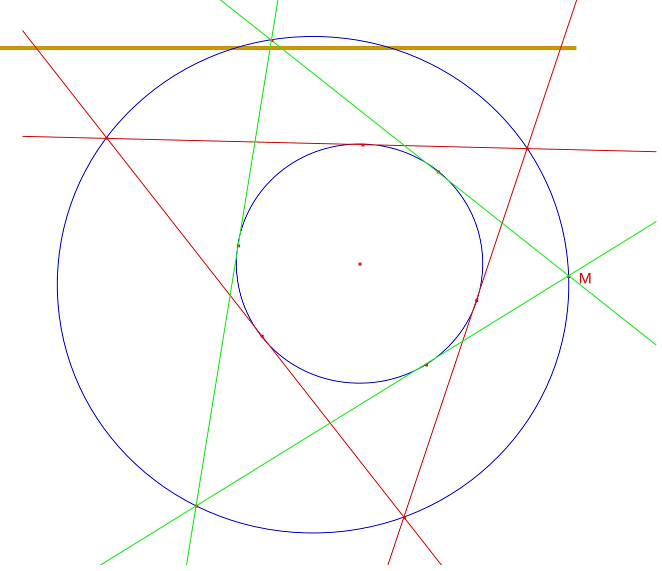
Cas particulier des cercles inscrit et circonscrit à un triangle

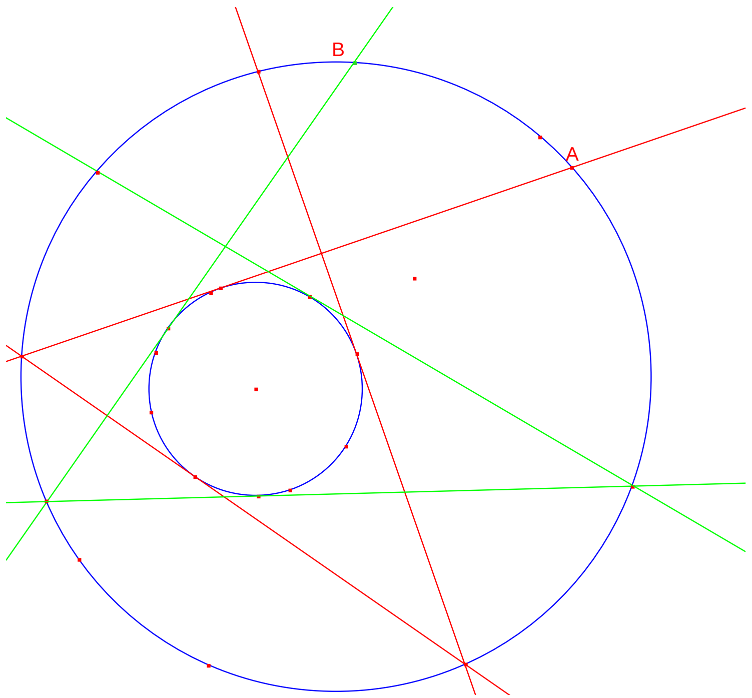
- Enoncé 1.
  Soit un triangle, son cercle circonscrit et son cercle inscrit. Soit M un point quelconque du cercle circonscrit ; les tangentes menées de M au cercle inscrit recoupent le cercle circonscrit en P et Q. Alors la droite (PQ) est aussi tangente au cercle inscrit.
  Autrement dit, les cercles inscrit et circonscrit au triangle MPQ sont les cercles inscrit et circonscrit au triangle de départ.

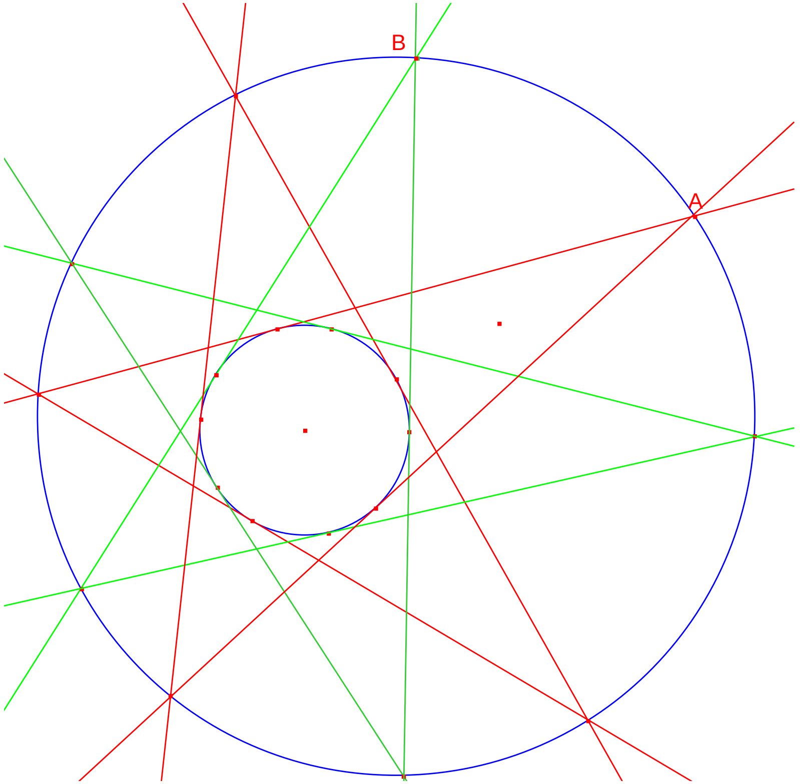


- Formule de Chapple (1746) $R^2 - d^2 = 2rR$

- Enoncé 2. Etant donnés deux cercles C et C’ tels que C’ intérieur à C. Soit A un point de C. On mène une tangente à C’ passant par M, elle recoupe C en P. La deuxième tangente à C’ passant par P recoupe C en Q. Si la deuxième tangente à C’ passant par Q recoupe C en A, alors, pour tout point M de C, la construction successive de trois tangentes à C’ par le même procédé formera un triangle inscrit dans C et circonscrit à C’.

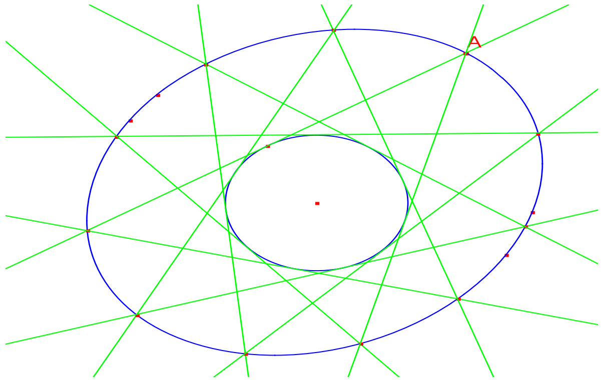






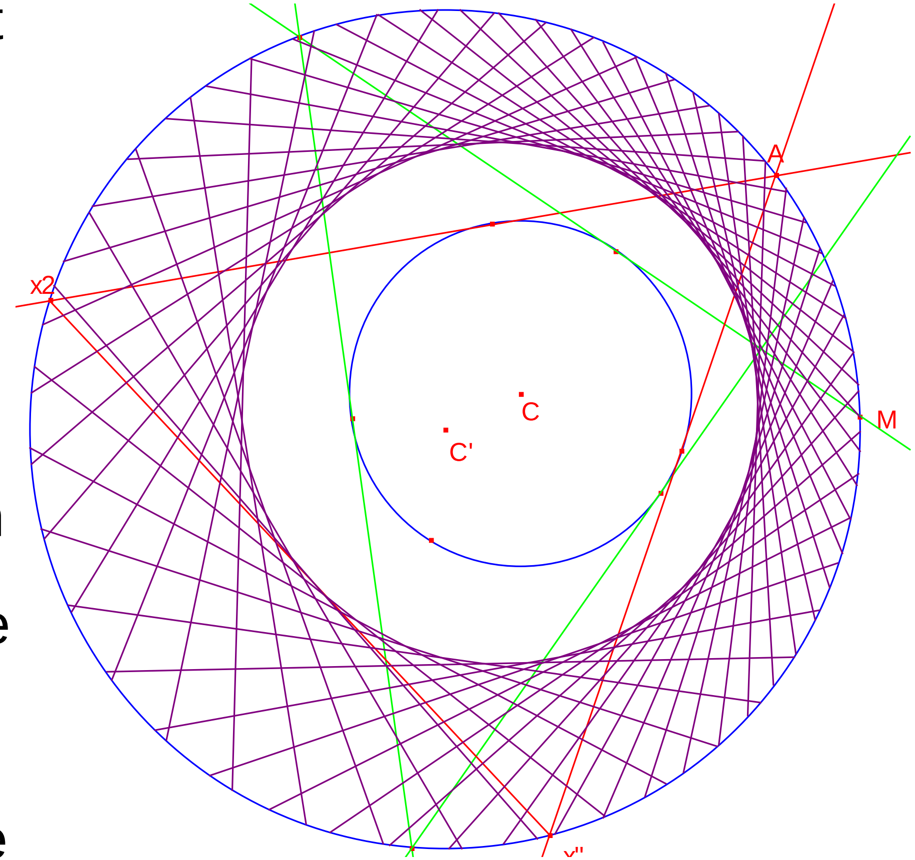
- Généralisation à une ligne polygonale.
  - Définition de ligne polygonale inscrite-circonscrite : Soient deux cercles C et C' tels que C' intérieur à C. On dit qu'une ligne polygonale est inscrite dans C et circonscrite à C' si tous les sommets de cette ligne sont sur C et si tous les segments sont tangents à C'.
  - Construction d'une ligne polygonale inscrite dans C et circonscrite à C' à partir d'un point M de C : on trace une tangente à C' passant par M, elle recoupe C en M1. La deuxième tangente à C' passant par M1 coupe C' en M2 etc.
  - Enoncé 2. Si on a deux cercles C et C' avec C' intérieur à C et si une ligne inscrite dans C - circonscrite à C' se referme en trois coups (i.e. M3 = M), toutes les lignes inscrites-circonscrites se referment en trois coups.
  - Enoncé 3. Soient deux cercles C et C' tels que C' intérieur à C. Soit M un point de C ; à partir de M, on construit une ligne polygonale inscrite dans C et circonscrite à C'. S'il existe un n tel que Mn = M, alors pour tout point N de C, la ligne polygonale construite de la même manière à partir de N se referme au bout du même nombre de pas.
- Généralisations

C'est valable aussi pour le cercle circonscrit et un cercle exinscrit.
C'est valable quand on remplace les cercles par des coniques



Enoncé préliminaire de Poncelet

C et C' sont les centres de deux cercles quelconques. D'un point α de la circonférence (C') on mène à la circonférence (C) deux tangentes $\alpha x''$ et αx_2 dont l'une coupe la première (C') au point x'' et l'autre au point x_2, on mène enfin par ces deux points, la corde $x''x_2$; je dis que « si l'on vient à faire parcourir la circonférence (C') au sommet de l'angle α du triangle inscrit $\alpha x''x_2$, en assujettissant les côtés $\alpha x''$ et αx_2 à être constamment tangents au cercle (C), le troisième côté $x''x_2$ roulera dans toutes ses positions sur une autre circonférence de cercle (C''), qui jouira de la propriété d'avoir une même corde commune, réelle ou imaginaire, avec les deux premiers cercles (C) et (C').



Le théorème 1 dirait alors que si (C'') = (C) pour un point A de (C'), alors ce sera vrai pour tout point.

Adapter les énoncés à l'expérience de ceux à qui ils s'adressent

- La formulation des énoncés mathématiques évolue en fonction des connaissances, des expériences auxquelles on peut faire référence. Elle évolue nécessairement selon les niveaux scolaires où la même notion sera reformulée au fil des années, aussi bien au niveau des définitions que des théorèmes qui la concernent.
- En géométrie, cette évolution des savoirs et des formulations se double d'un changement de nature de la figure (de la figure puzzle à la figure tracée avec des instruments) puis d'un changement de regard sur la figure tracée sur papier ou sur écran.
- La géométrie, comme le reste des mathématiques est actuellement organisée comme un discours mais les formulations premières des théories de la géométrie sont appuyées sur les figures qui jouent le rôle d'intermédiaires entre le monde réel et le discours (en particulier modélisation de problèmes de l'espace). Comment la continuité des savoirs et des formulations du début de l'école à la fin du collège est-elle gérée par le système scolaire ?

Exemple 2 : différentes formulations de quelques savoirs sur la symétrie orthogonale

- Les ostensifs et non ostensifs en CE2 (3ème P)
  - Objets matériels qu'on manipule (éléments du *milieu*) : gabarits, figures dessinées qu'on découpe, qu'on plie, papier calque sur lequel on peut reproduire tout ou partie de la figure, qu'on plie, qu'on retourne, support uni, quadrillé, instruments de tracé (règle, équerre, compas), instruments de report de longueur, pour prendre le milieu d'un segment…
  - Les actions et les gestes : plier selon l'axe ou plier en faisant coïncider deux éléments…
  - Vocabulaire spécifique : figure symétrique, axe de symétrie, symétrique d'une figure par rapport à un axe…
  - Ces ostensifs sont en relation avec des propriétés mises en œuvre dans l'action sur les figures ou les objets matériels mais qui ne seront peut-être pas complètement formulées à ce niveau (deux segments symétriques ont la même longueur, deux droites symétriques se coupent sur l'axe de symétrie…)

Exemple 2 : différentes formulations de quelques savoirs sur la symétrie orthogonale

- Quelques formulations possibles au CE2 (3ème P)
  - Une figure est symétrique si on peut la plier en deux parties qui se superposent exactement. Le pli indique une droite qu'on appelle l'axe de symétrie.
  - Une figure n'est pas symétrique si on ne peut pas la plier en deux parties qui se superposent exactement.
  - La retournée d'une figure est celle qu'on obtient quand on la décalque et qu'on retourne le calque.
  - Une figure est symétrique si on peut la faire coïncider exactement avec sa retournée.
  - Une figure n'est pas symétrique…
  - Deux figures sont symétriques par rapport à un axe si elles se superposent exactement quand on plie la feuille sur l'axe.
- Vocabulaire géométrique et vocabulaire pour faire de la géométrie

Exemple 2 : différentes formulations de quelques savoirs sur la symétrie orthogonale

- Ostensifs et non ostensifs en 6ème
  - Les ostensifs sont en gros les mêmes moins les gabarits mais on met l'accent sur la construction aux instruments en ajoutant éventuellement l'usage de logiciels.
  - Les non ostensifs au moment du cours sont des propriétés généralisées des actions sur les objets matériels :
    - Le pliage sert à donner les définitions
    - Les propriétés de conservation (de l'alignement, des longueurs, des angles, des aires) sont constatées expérimentalement.
  - Cependant, les constructions aux instruments demandent de passer à une vision ponctuelle de la figure : les instruments permettent de tracer des lignes qui sont définies à partir de points ou qui produisent des points par leurs intersections alors qu'en CE2 les lignes et les points sont encore surtout des bords ou sommets de surfaces.
    - Le symétrique d'un point…
    - Lien avec la médiatrice permet de relier les constructions du symétrique d'un point à l'équerre et au compas. Mais dans le programmes actuels ce n'est pas exigé dans le socle commun.

Exemple 2 : différentes formulations de quelques savoirs sur la symétrie orthogonale

- On a un changement complet des significations (les non ostensifs changent, il faut voir une figure comme un ensemble de points ou au moins comme déterminée par des points) qui demanderait une reconstruction des définitions et des propriétés à partir du symétrique du point et de la droite. Mais ceci n'est pas pris en charge dans l'enseignement et se passe subrepticement.
- Problème didactique, problème de la profession

  Comment les enseignants de sixième peuvent-ils gérer le lien entre les manipulations du type pliage ou retournement d'un calque et les formulations mathématiques de la symétrie et de ses propriétés ? Comment peuvent-ils faire le lien entre le discours lié aux manipulations matérielles et le discours mathématique ? Comment faire pour que la figure (ostensif) devienne un ensemble de points (non ostensif) ?

  Voir exemple en TD sur la symétrie centrale en 5ème

Le langage et les situations

- Les situations pour modéliser l'activité mathématique.
- Dialectique de la formulation.
- Le langage dans les situations didactiques. Moyens méthodologiques pour l'analyse de séances de classe. Gestion du milieu et du contrat didactique.

1. Les situations pour modéliser l'activité mathématique.

L’activité mathématique : dire et faire

- L’activité mathématique ne se réduit pas au discours, elle le précède souvent : on peut savoir faire sans savoir dire ou avant de savoir dire.
- De plus, il ne suffit pas de savoir dire, il faut savoir faire.
- Mais savoir dire certaines choses peut aider à savoir en faire d’autres ; nous reviendrons sur la formulation
- La différence et la dialectique entre dire et faire est un des points de départ de la théorie des situations
  - identification dès 1970 des dialectiques de l’action, de la formulation, de la validation,
  - différence entre connaissances et savoirs

Connaissances et savoirs

- « La théorie des situations est née du défi que nous nous étions donné d'enseigner quelque chose qui ne pouvait pas être un texte, ni un commentaire de texte : le contrôle du raisonnement logique, et qui était impossible à faire transmettre par les professeurs tout à fait inféodés au langage. Pour enseigner les bases on ne pouvait pas faire autrement que de commencer par des leçons non verbales et pour cela on ne pouvait pas éviter l'obligation de faire des situations qui suscitent les connaissances avant les formulations de référence et avant les savoirs de logique. Mettre les connaissances avant et en même temps que les savoirs est une révolution copernicienne par rapport à un contrat classique d'enseignement nécessairement calé sur le langage par le contrat que doit tenir le professeur.
Les connaissances sont en grande partie insaisissables et fugitives hors des situations qui les animent. Surtout si elles n'ont pas de support linguistique. Elles sont instables… nécessaires, douteuses ou même fausses etc. On ne peut pas fonder de conclusions ni de prévisions à partir de leurs manifestations furtives, fortement réprimées par la discipline culturelle. Pourtant elles sont indispensables. » (échange avec GB, juin 2011)

Produire des connaissances avant de les formuler

- Les formulations mathématiques s'appuient sur des connaissances et des expériences qui les précèdent. Pour construire une progression pour l'enseignement, il faut prévoir non seulement l'organisation des savoirs mais la construction des connaissances sur lesquels ils peuvent s'appuyer.
- Comment caractériser et produire ces connaissances préalables sur lesquelles vont s'appuyer le savoir mathématique et le langage mathématique ?
- La théorie des situations le fait en représentant les savoirs (connaissances de référence) par des situations problématiques que ces savoirs permettent de résoudre, pour faire apparaître des connaissances (de référence ou non). Voir diaporama 8 p. 4-5.
- Une situation mathématique : un milieu et une question problématique qu'on modélise par un jeu c'est-à-dire un but et des règles du jeu (des contraintes). Résoudre le problème c'est gagner le jeu. Les connaissances permettent d'agir sur le milieu et avec le milieu ; elles permettent d'interpréter les rétroactions du milieu.

Avertissement sur le terme « situation », site GB diaporama 8, p. 22

- Le terme ***situation*** est utilisé ordinairement pour désigner de façon globale les systèmes des conditions indéterminées qui *accompagnent* un fait, ici un épisode d'enseignement en observation, sans qu'on sache toujours si ces conditions jouent un rôle ou non.
- Les conditions effectivement observées et relevées pour décrire un fait forment sa « contingence »
- En théorie des situations, le terme situation désigne :

  - soit un ***modèle théorique*** de ce système : description formelle comportant un nombre réduit mais suffisant d'objets et de relations. Il sert

    - à vérifier la définition et la non contradiction du choix des objets et de leurs effets présumés

    - et à prévoir les comportements du système

  - soit un ***modèle empirique***, intermédiaire entre la contingence et le modèle théorique

Quelques extraits du diaporama 8

- Les modèles théoriques généraux des situations mathématiques sont des « jeux » ou encore des « modèles à agents ».
- Le jeu met en présence un « milieu », matériel ou non , des « agents », qui modifient l'état du milieu par leurs décisions, conformes à des règles convenues, en vue de mettre ce milieu dans un état final déterminé. (p. 23)
- Le modèle mathématique (MM) d'une situation formalise les états du système (des éléments en présence et de leurs relations) et leurs transitions suivant les décisions des agents. (p. 26)
- L'observation directe des actions des agents et de leurs effets ou résultats, permet d'inférer des régularités, des caractères… et de les organiser en modèles empiriques, sans les intégrer immédiatement dans un modèle théorique de la situation.
- Ces modèles empiriques sont souvent une étape très utile dans la conception des situations et dans leur mise en œuvre. (p. 27)

… et du diaporama A2

- Une situation met en scène des personnages fictifs (mathématiciens ou élèves en théorie des situations mathématiques) que nous appelons actants ou joueurs.
- Ils agissent dans un milieu (objets, actants, textes), avec l'intention de réaliser un certain projet, en respectant des règles qui leur sont données ou des nécessités qu'ils découvrent. Les décisions qu'ils prennent sont commandées par des connaissances. (p. 17)
- La résolution d'un problème requiert certainement de l'élève l'agitation d'un flot de connaissances, mais celles qui ne participent pas au texte final, en particulier celles qui sont fausses, sont considérées comme des erreurs.
- Une situation au contraire peut déléguer officiellement à un milieu le rôle de porter certaines conditions non dévoilées dans les règles. Il se révèle alors comme une sorte de « réalité » qui laisse un espace propice aux aventures, aux expériences, à un questionnement, à une histoire légitime et honorable des actes du sujet. Il reste à déterminer les plus fructueuses et les plus signifiantes. (p. 18)

Les situations pour modéliser l'activité mathématique. Différents usages des connaissances.

- La dialectique de l'action vise à créer les connaissances nouvelles nécessaires en s'appuyant sur les connaissances anciennes disponibles.
- La dialectique de la formulation vise à enrichir le langage des éléments nécessaires à la formulation des connaissances comme savoirs.
- La dialectique de la validation vise à reconnaître la validité de ces savoirs et l'intérêt qu'il peut y avoir à les retenir pour s'en servir à nouveau. Le langage et les formulations interviennent différemment dans ces trois dialectiques.
- Dans ces trois dialectiques, on distingue l'usage des connaissances dans les situations.
- Dévolution et institutionnalisation se situent sur un autre plan, celui de l'action du professeur. Nous y reviendrons dans la 3ème partie.

Les situations mathématiques à usage didactique

- Les variables des situations, variables du milieu, variables des règles du jeu
- Les variables didactiques : celles sur lesquelles le maître peut agir et qui ont un effet sur les connaissances nécessaires pour gagner le jeu. Ce sont des instruments de l'action du maître.
- La situation mathématique à usage didactique répond à un enjeu didactique ; on choisit les valeurs des variables en fonction de cet enjeu didactique.
- Et les ostensifs ?
  Il ne sont pas identifiés en tant que tels en TS : ils font partie du milieu et doivent donc être décrits avec chaque situation. Ce sont des éléments du milieu sur lesquels peut porter l'action du sujet ou qui peuvent être des moyens de l'action du sujet. On insiste en général sur le côté antagoniste du milieu mais le milieu apporte aussi des ressources pour l'action. Les non ostensifs associés sont les connaissances nécessaires pour manipuler ces ostensifs.

Les situations mathématiques à usage didactique

- Et le langage ?
  - Il peut intervenir comme enjeu didactique (situation de formulation qui est un type particulier de situation d'action, situation de validation qui est un type particulier de situation de formulation)
  - Il peut être un moyen d'action, il peut être un moyen de communication entre les acteurs
- Les jeux de cadres
  La production de mathématiques procède à la fois par résolution de problèmes ouverts, création d'outils nouveaux pour les résoudre, et par reprise et reformulation de problèmes déjà résolus ou de mathématiques anciennes à l'aide des nouveaux outils. Régine Douady a souligné l'importance des changements de cadres dans la progression des mathématiques ; ces changements de cadres incluent de changements de représentations (donc d'ostensifs) et de langage. On peut les utiliser comme leviers épistémologiques dans l'action didactique en organisant ce que R. Douady a appelé des jeux de cadres : des changements de cadres organisés (via le milieu et les règles du jeu) à des fins didactiques.

2. La dialectique de la formulation

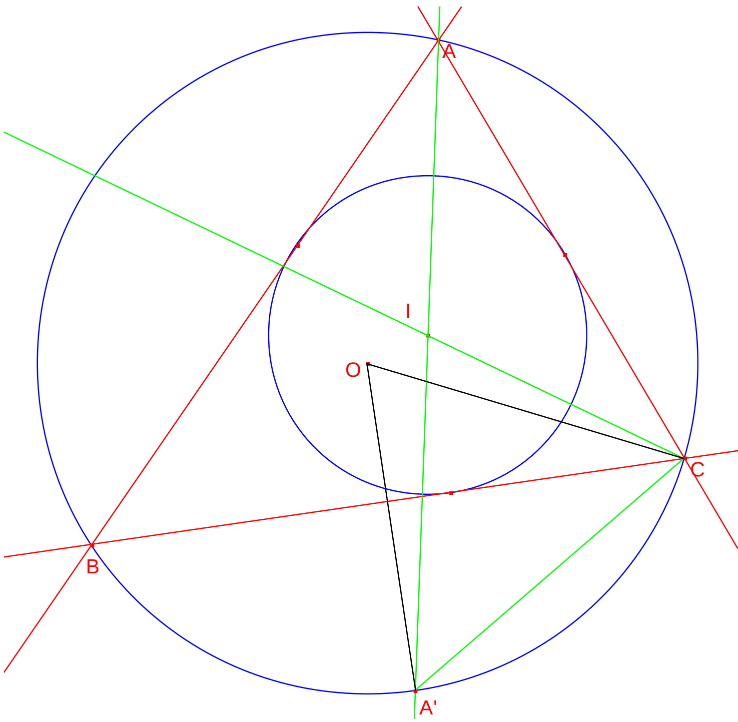
1. Petite expérience non didactique
2. A quelles conditions une situation de formulation répond-elle ?
3. Différents niveaux de langage dans une situation didactique

Dialectiques de l'action, de la formulation et de la validation dans la recherche d'un problème hors situation didactique

- Où interviennent le langage et les formulations quand on cherche un problème pour soi ?
- On avance sans tout formuler, en se servant de son intuition, par mise en relation de connaissances naturalisées…
- Quand est-on amené à faire une pause de formulation pour exhiber des énoncés ?
  - Soit quand on pense avoir trouvé, pour mettre au propre, formulation et validation vont alors s'entremêler et interagir,
  - soit quand on bloque, pour faire le point sur ce qu'on a tenté, pour faire un inventaire, fermer des pistes et avec l'espoir d'en ouvrir de nouvelles.

Démonstration de la formule de Chapple $R^2 - d^2 = 2rR$

- La puissance du point I par rapport à *C* est égale en valeur absolue d'une part à $R^2 - d^2$ d'autre part à IA.IA'
- Mais IA' = A'C car dans le triangle IA'C, les angles A'IC et ICA' sont égaux : d'une part A'IC = A/2 + C/2 comme extérieur au triangle AIC ; d'autre part ICA' = C/2 + BCA' mais BCA' = BAA' = A/2.
- IA = r/sin(A/2) : triangle rectangle AIH où H est la projection de I sur (AC), i.e. le point de tangence.
- A'C = 2R sin(A/2) : triangle isocèle A'OC, angle au centre correspondant à A/2.
- Finalement $R^2 - d^2 = 2rR$.



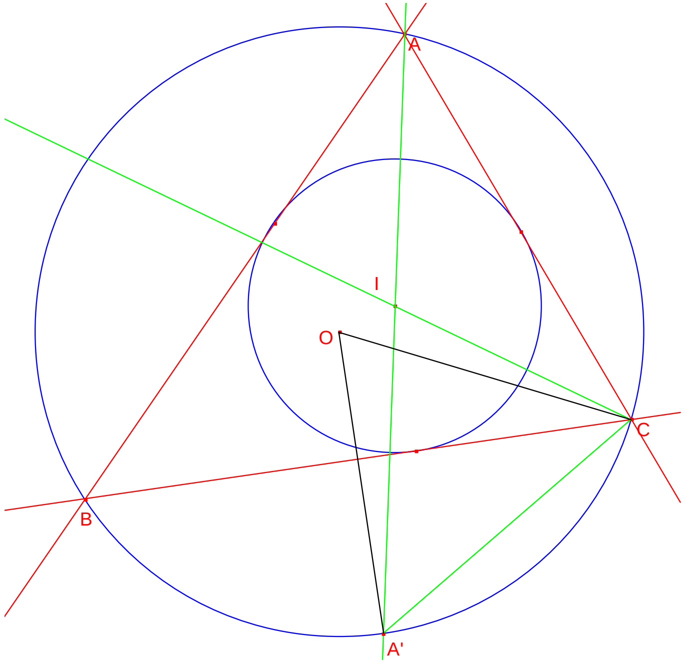
La démonstration du théorème de Poncelet remonte simplement celle de la formule de Chapple.

L'égalité entre IA' et A'C n'apparaît que comme un moyen de calcul de IA'. Le fait de l'identifier comme une propriété de la bissectrice m'a permis de faire un pas dans la compréhension de la situation géométrique.

Une démonstration géométrique élémentaire du théorème de Poncelet (cas de 2 cercles, l'un intérieur à l'autre)

- Lemme 1 : propriété des bissectrices liant cercle inscrit et cercle circonscrit.

Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle C de centre O. La bissectrice issue de A recoupe C en A' et on appelle I le centre du cercle inscrit dans ABC. On a A'I = A'B = A'C (donc le cercle de centre A' et passant par B et C passe aussi par I).

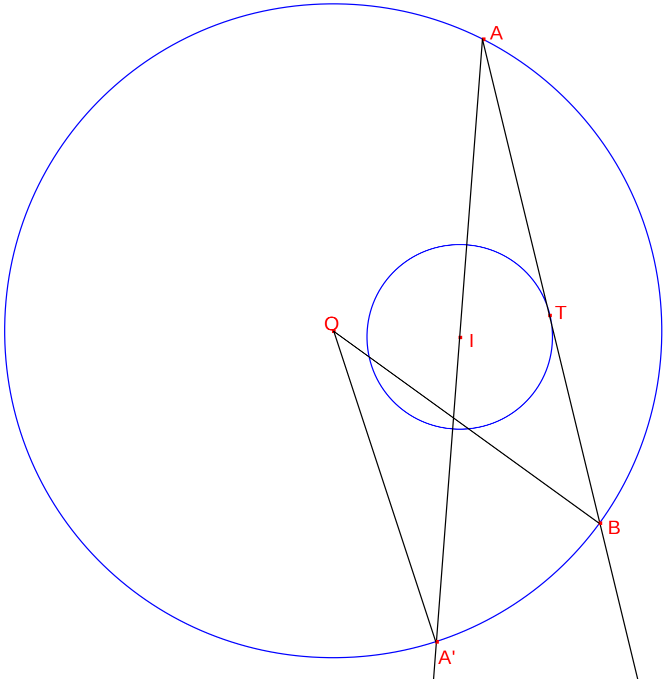


En faisant la démonstration du théorème directement à partir de ce lemme, je me suis aperçue que si on prend deux tangentes issues de n'importe quel point P sur le cercle *C*, cela donne une bissectrice passant par I. On en veut une deuxième. On peut simplifier le lemme 1 en oubliant le triangle et en ne retenant qu'un diamètre et une tangente.

Signification géométrique de la relation $R^2 - d^2 = 2rR$

- Lemme 1 bis

  Soient deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre, O le centre du cercle C extérieur et I le centre du cercle C' intérieur et A un point de C. Par A on mène une tangente à C' qui recoupe C en B. (AI) recoupe *C* en A'.



- Appelons a l'angle BAA', r et R les rayons des cercles. On a IA = r/sina, A'B = 2Rsina donc IA.A'B = 2rR.

- 2rR exprime la puissance du point I par rapport à C si et seulement si A'B = A'I, c'est-à-dire A' sur la médiatrice de [IB].

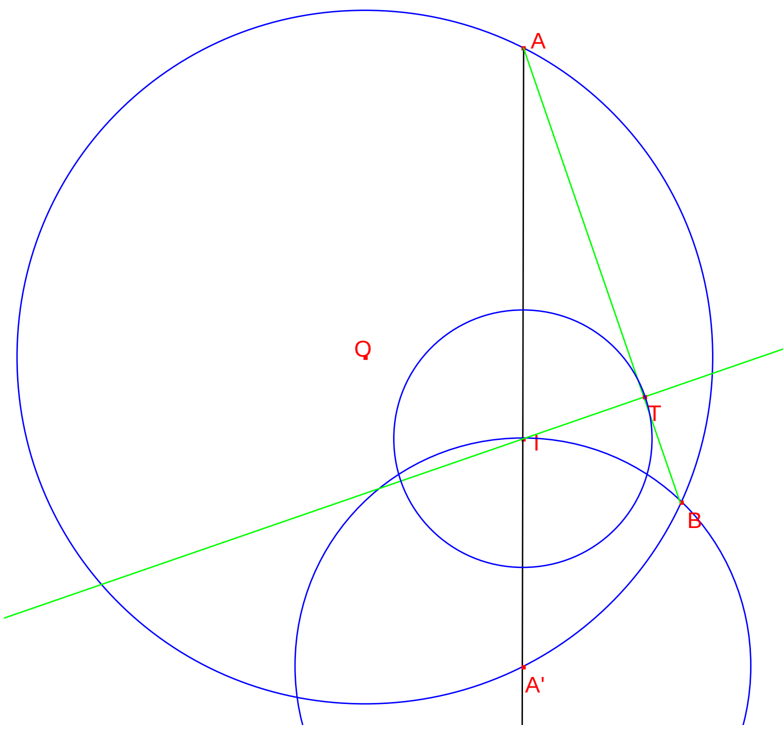
Nouvelle formulation de la relation entre les cercles

- Soient deux cercles dont l'un, de centre I, est intérieur à l'autre. D'un point A du cercle extérieur, on mène une tangente au cercle intérieur qui recoupe le cercle extérieur en B ; la droite (AI) recoupe ce cercle en A'. Les deux cercles sont respectivement les cercles inscrit et circonscrit à un triangle ABC si et seulement si A' est sur la médiatrice de [IB].
- Quand on se donne I intérieur à C, la puissance de I par rapport à C est fixée. La relation précédente permet donc de construire un unique C' lié à C par la relation de Chapple, ce qui permet d'énoncer :

Nouvelle version du théorème

On se donne seulement I et on construit C'

- Étant donné I intérieur à un cercle C, il existe un seul cercle C' centré en I et intérieur à C vérifiant la propriété suivante : pour n'importe quel point A de C, si on appelle A' l'intersection de (AI) avec (C) et B l'intersection avec (C) d'une tangente menée de A à C', le cercle de centre A' passant par I passe aussi par B et le produit IA.A'B est constant et égal à la puissance de I par rapport à (C) et réciproquement.
  C et C' sont les cercles circonscrit et inscrit à un triangle de sommet A.



Énoncés intermédiaires et regard sur la figure

- Au cours de ma recherche j'ai été amenée à formuler des énoncés intermédiaires étroitement liés à des changements de point de vue sur des parties de la figure.
  - propriété des bissectrices liant cercle inscrit et cercle circonscrit à un triangle.
  - Relation liant deux cercles dont l'un est intérieur à l'autre : Soient O le centre du cercle C extérieur et I le centre du cercle C' intérieur et A un point de C. Par A on mène une tangente à C' qui recoupe C en B. (AI) recoupe *C* en A'. On a IA.A'B = 2rR
  - Condition pour qu'ils soient les cercles inscrit et circonscrit à un même triangle : A' est sur la médiatrice de IB (IA'=IB).
  - Construction de C', I étant donné : étant donné I intérieur à un cercle C, il existe un seul cercle C' centré en I et intérieur à C tel que pour n'importe quel point A de C, si on appelle A' l'intersection de (AI) avec (C) et B l'intersection avec (C) d'une tangente menée de A à C', le produit IA.A'B est constant et égal à la puissance de I par rapport à (C).
- La formulation de ces énoncés intermédiaires amène de nouveaux changements de regard sur la figure.
- On voit bien ici qu'on ne peut pas séparer le langage des autres ostensifs et des non ostensifs qui leur sont associés.

Quelle différence entre situation de formulation et phase de formulation dans une situation d'action ?

- Introduction d'une contrainte sur l'action amenant une nécessité de formulation
  - Exemple de la course à 20
  - Les situations de formulation sont celles qui demandent un dispositif réel organisé par le professeur avec un objectif de construction ou d'usage linguistique. Elles appartiennent donc à fondamentalement à la TSDM. Les formulations au cours des situations mathématiques proprement dites sont motivées par la réflexion elle-même et n'ont pas besoin d'un dispositif didactique. Il y a formulation mais sans situation spécifique de formulation. (GB, juin 2011)
- La différence principale est pour moi dans la portée (degré de décontextualisation) de la formulation qui est sollicitée (cf. situation de rappel de type 1). C'est même parce qu'on a un enjeu relatif à la portée de la formulation qu'on ne peut pas obtenir autrement qu'il va valoir la peine de mettre en place une situation de formulation.

Le langage et la formulation dans la conception et l'analyse a priori des situations didactiques

- Quelles connaissances, quels savoirs méritent d'être formulés ?
- Quelles connaissances sont susceptibles d'être formulées au cours de l'action ?
- Quels besoins de formulation supplémentaires est-il nécessaire de créer pour les élèves ? Quelles conditions pour les réaliser ?
- Quelles justifications risquent d'accompagner naturellement la formulation ?
- Quelles justifications supplémentaires faut-il solliciter ? A quelles conditions la nécessité s'en fait-elle sentir ?

Exemple 3 : numération au CE2

- L’ingénierie (thèse de F. Tempier) repose sur la situation fondamentale de l’écriture d’un nombre dans une base et sa réciproque
  - Jeu 1 : Dénombrement d’une grande collection. Le but (connaissance visée) est la définition des règles d’organisation de la collection pour faciliter son dénombrement (groupements successifs par dix) et les relations entre les différents groupements.
  - Jeu 2 : Le jeu des marchands. Il s’agit de fabriquer, à partir du nombre écrit, une collection organisée en tenant compte de contraintes sur ce qui est disponible pour organiser la collection (exemple on veut acheter 3453 allumettes mais le marchand n’a plus de boîtes de mille ou de cent).
- Ostensifs :
  - matériel, son organisation, numération orale, écriture chiffrée, tableau ordinaire, tableau de numération, abaques, numération en unités (unités, dizaines, centaines…)
- Savoirs relatifs à l’écriture et à la décomposition d’un nombre en base dix

Quelle partie de ces savoirs peut-on formuler au CE2 ? Comment ?

1. Le même chiffre a des valeurs différentes selon sa position dans l'écriture d'un nombre
2. Si un ordre est manquant, sa place doit être marquée par un 0
3. Dans une centaine il y a cent unités mais aussi dix dizaines ; dans un millier il y a mille unités mais aussi dix centaines, ou cent dizaines.
4. Pour faire une centaine, il faut dix dizaines, pour faire un millier il faut dix centaines ou cent dizaines…
5. Dans un nombre, le nombre de centaines (dizaines…) n'est en général pas égal au chiffre des centaines… : quand on veut savoir combien il y a de centaines dans un nombre, il ne faut pas oublier de compter aussi les centaines qui sont dans les milliers (diverses formulations possibles).

Pourquoi une situation de formulation ? Sur quoi ? Comment ?

- Des observations sur la mise en œuvre du jeu du marchand
  - Les enseignants se contentent de vérifier collectivement les propositions des élèves donc ils utilisent et font utiliser aux élèves seulement les relations aux unités et toujours dans le sens : 1 centaine = 100 unités, 1 millier = 1000 unités.
- Que faut-il formuler ?
  - Les relations intermédiaires
  - Utiliser les égalités dans l'autre sens
- Quelle contrainte amener ?
  - Ne pas connaître à l'avance le nombre d'objets à acheter.

Une situation de formulation possible ?

- 1er temps : on joue le jeu du marchand trois ou quatre fois avec des nombres à trois ou quatre chiffres différents comprenant ou non des 0 ; le marchand n'a plus de centaines puis il n'a plus de milliers.
- 2ème temps : les élèves sont par équipes (de 2 ou plus suivant les habitudes de la classe) ; on leur annonce qu'on va jouer au même jeu mais qu'on leur donnera le nombre à commander plus tard ; ils doivent pour l'instant écrire sur une affiche (phase de formulation) comment on peut faire pour commander le bon nombre de bûchettes (billes, timbres…) si le marchand n'a plus de centaines. On leur annonce que les affiches seront présentées au tableau et discutées collectivement.
- 3ème temps : Les affiches sont présentées au tableau et discutées collectivement (phase de validation). Les élèves doivent prouver qu'une méthode est bonne ou qu'elle ne l'est pas (on attend des exemples génériques ou des contrexemples).
- 4ème et 5ème temps même chose mais le marchand n'a plus de milliers.

Que peut-on attendre ?

- Quelques formulations possibles :
  - Si le marchand a ce qu'il faut, on commande en se servant des chiffres du nombre
  - Si le marchand n'a plus de paquets de mille, on peut prendre des centaines pour faire les milliers
  - Si le marchand n'a plus de centaines, on peut faire une centaine avec dix dizaines
  - Si le marchand n'a pas de milliers, on peut faire des milliers avec des centaines et des dizaines
  - Pour chaque millier on commande dix centaines
  - Si le marchand n'a pas de milliers, pour les centaines on fait une barre après le chiffre des centaines et on lit le nombre de centaines à commander à gauche
  - Mais on peut attendre aussi (surtout si on n'a traité dans la première phase que des nombres à 4 chiffres) « pour les centaines on prend les deux chiffres de gauche »

Différents niveaux de langage dans une situation didactique

- Le langage, moyen de l'activité mathématique et objet d'enseignement/apprentissage :
  Enjeux de formulation « mathématique » différents
  - dans une situation d'action
  - dans une situation de formulation
  - dans une situation de validation : nécessité non seulement de formuler mais de se prononcer sur la validité de ce qui a été formulé

  Ces formulations sont de nature « mathématique » tout en mêlant langage naturel et langue mathématique.
- Le langage moyen de l'activité didactique.
  Fonctions purement didactiques du langage dans la gestion du contrat didactique par l'enseignant et dans les interactions maître - élèves :
  - Prise d'information et communication
  - dévolution d'un problème, régulation des rapports avec le milieu, institutionnalisation de savoirs.

  Le langage naturel intervient en se mêlant aux énoncés mathématiques

3. Le langage dans les situations didactiques. Moyens méthodologiques pour l’analyse de séances de classe. Gestion du milieu et du contrat didactique Analyse a posteriori

Esquisse d’une grille d’analyse

Un exemple illustrant la question du lien à faire entre différents ostensifs

Comment analyser ce qui se passe dans une classe réelle du point de vue de la TS ?

- Ce qui se passe dans une classe à un instant donné dans une séance donnée se situe dans une histoire : l'enjeu didactique particulier est à situer dans une progression, dans un enjeu plus global
- Grille d'analyse pour analyser les fonctions didactiques du langage dans une séance ; niveau local (ou méso)

a) Quel est l'enjeu didactique (savoirs, connaissances) ?

b) Mise en place du milieu, dévolution

c) Régulation des rapports des élèves avec le milieu, négociation du contrat didactique dans une phase de recherche des élèves si elle existe

d) Mise en commun, conclusion de la séance

Grille d'analyse des fonctions didactiques du langage

- Enjeu didactique de la séance (en termes de savoirs, connaissances, y compris langage)
  - Il peut contenir un enjeu langagier : introduction de termes nouveaux ou d'un usage nouveau de la langue mathématique ; il peut contenir un enjeu de formulation sans introduction de langage nouveau ; il peut ne contenir aucun enjeu au niveau du langage mathématique ni de la formulation
  - Comment cet enjeu est-il situé, dans quelle progression ? Quelle est la fonction didactique de la séance (cours / exercices ?) Quel est le statut du savoir en jeu (nouveau, en cours d'apprentissage, ancien, …) ?
  - Ces éléments sont essentiels pour l'interprétation de ce qui se dit ou se fait dans la séance.

Grille d’analyse des fonctions didactiques du langage

- Mise en place du milieu, dévolution
  - La mise en place du milieu et la dévolution se font essentiellement par des actions (gestes) sur des éléments matériels du milieu et par le langage.
  - Le professeur s’assure de la compréhension des termes du problème et des éléments fournis dans le milieu : éléments de savoir antérieurs, ostensifs y compris objets matériels, leur manipulation ; il vérifie la présence des connaissances anciennes nécessaires pour cela et pour mettre en place une stratégie de base : les élèves doivent pouvoir faire quelque chose, développer une activité mathématique, au moins à un niveau inférieur à celui qui est visé.
  - Le langage qui intervient est une combinaison de langage mathématique et de langage naturel en lien avec les autres ostensifs fournis dans le milieu, les connaissances activées par le maître pendant la phase de dévolution…
  - Une part d’ostension peut être nécessaire pour mettre en place ce milieu : comment est-elle réalisée ? Quelles stratégies le maître utilise-t-il pour la dévolution : formulations, questions, répétitions, reformulations des propositions des élèves… sur le savoir ancien, sur les éléments du milieu, sur la question à résoudre (tâche) ?

Grille d’analyse des fonctions didactiques du langage

- Régulation des rapports des élèves avec le milieu, négociation du contrat didactique dans une phase de recherche des élèves si elle existe (qu’un nouveau savoir soit en jeu avant/dans un cours ou qu’on soit dans une séance d’exercices).
- Elle se fait essentiellement par le langage mais la fonction didactique des interactions se détermine en répondant aux questions suivantes :
  - Quelles modifications du milieu, de la tâche (jusqu’à une modification de la situation) ?
  - Quelle activité mathématique des élèves : connaissances mises en jeu, ostensifs utilisés, points de blocage ?
  - Quels apports de l’enseignant : mise en évidence de certains éléments du milieu, injection de vocabulaire, d’ostensifs (enrichissement du milieu), activation de connaissances (par exemple parallèle avec d’autres situations déjà rencontrées : cf. mémoire didactique).

Grille d'analyse des fonctions didactiques du langage

- Mise en commun. Conclusion. Selon finalité de la séance : y a-t-il ou non explicitation d'un savoir nouveau ? Sous quelle forme ?
  - Formulations d'un savoir nouveau ou en cours d'apprentissage, reprise de savoirs anciens : langage mathématique en lien avec les autres ostensifs du milieu. Quels liens sont faits ? Quelle décontextualisation ? Degré de généralité des savoirs formulés.
  - Place faite aux connaissances mises en jeu par les élèves : qui a la parole ? Quelles interactions entre le professeur et les élèves ? A quel niveau intervient le professeur ?
  - Place faite au débat, à la validation : Qu'est-ce qui est écrit au tableau : seulement les éléments corrects à retenir ou toutes les propositions des élèves ? Quels arguments ? De qui ? Qui conclut ? Comment ? Quelle validation : quels arguments, quel niveau de preuve ?
  - Appui sur le milieu/décontextualisation : équilibre entre la situation particulière et les savoirs généraux, liens faits entre les deux ?
  - Finalement là aussi : appui sur le milieu et extension du milieu, place faite à la formulation des connaissances des élèves (celles qu'on peut formuler) et des savoirs à retenir (éventuellement), validation de ces savoirs.

La structuration du milieu peut-elle nous aider à un niveau plus fin (cf. TD) ?

M0 = S-1 Milieu d'apprentissage	E0 Élève	P0 Professeur	S0 situation didactique
M-1 = S-2 Milieu de référence	E-1 élève apprenant	P-1 professeur	S-1 situation d'apprentissage
M-2 = S-3 Milieu objectif	E-2 élève agissant	P-2 professeur observateur	S-2 situation de référence
M-3 Milieu matériel	E-3 Acteur objectif		S-3 Situation objective

Interprétations en termes de contrat

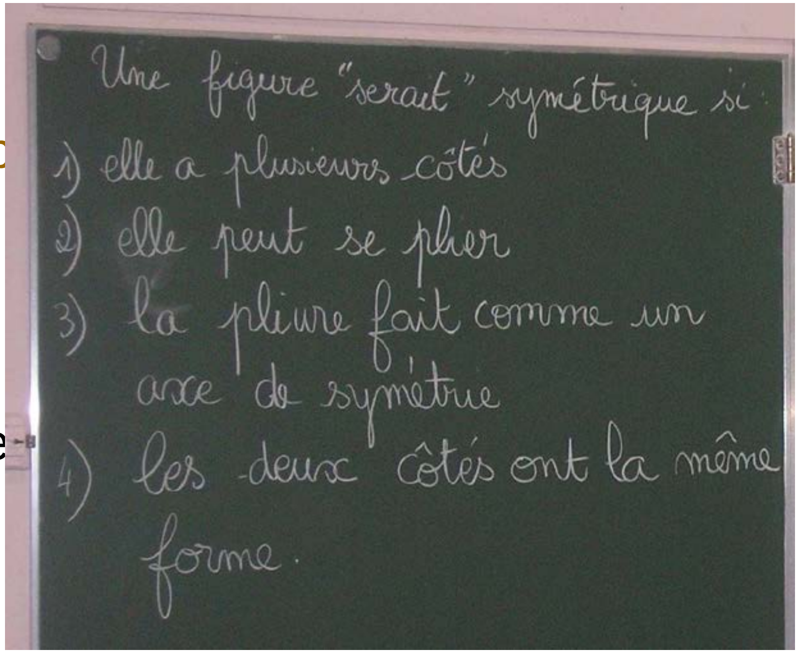
- Partage des responsabilités par rapport au savoir
- Statut des connaissances en jeu (anciennes, institutionnalisées, en cours d'apprentissage, toutes nouvelles…)
- En tenant compte des possibilités de rétroaction du milieu…

Exemple 4 : Introduction du mot « symétrique » au CE2

- P. Un crayon bien taillé, une règle, une gomme, le reste au fur et à mesure.
  Aujourd'hui on va s'occuper de symétrie. Je vais vous proposer quelques figures, des polygones. On va se poser la question de savoir si ces figures sont symétriques ou si elles ne le sont pas avec évidemment l'éternelle question : Pourquoi ? Pourquoi elles le sont ou pourquoi elles ne le sont pas.
  En distribuant les feuilles Déjà est-ce que vous vous souvenez de la symétrie là ? Vous l'avez fait en CE1 hein. Alors c'est quoi une figure symétrique ?
- E1. une <u>figure qui est fermée</u>
- E2. On fait <u>à la règle</u>
- P. ça c'est ce qu'on disait pour les polygones
- E3. On fait un <u>axe de symétrie</u> et on doit essayer de <u>reproduire la même figure de l'autre côté</u>
- P. Ca c'est dans le cadre de la reproduction, on se disait on a l'axe de symétrie et il faut faire la symétrique par rapport à cet axe. Mais si, moi, je vous donne la figure finie, comment est-ce qu'on fait pour savoir si elle est symétrique ?
- E. Elle a <u>plusieurs côtés</u>
- P. Allez, j'écris ce que vous dites et on va voir si c'est bon ou si c'est pas bon.

- *Elle écrit : Une figure « serait » symétrique si 1) elle a plusieurs côtés.*
- P. Donnez moi un exemple de figure symétrique
- E. un carré… E' un triangle…P. Tous les triangles ? E. non P. Quels triangles alors ?
- *Elle prend une feuille, la plie en deux et découpe une ligne courbe qui ressemble au bord d'un demi papillon d'un point du pli à un autre point du pli. Elle ouvre la feuille et dit* Cette figure est symétrique
- E. On peut plier, *elle l'écrit*
- E. On peut faire un axe
- P. Qu'est-ce que tu veux dire par là ?
- E. Ca veut dire qu'il y a un côté…
- P. J'ai des côtés là ? (montrant le papillon).
- E. non, ça fait comme un trait comme un axe de symétrie
- P. La pliure c'est un axe de symétrie
- *Elle l'écrit*
- P. Est-ce qu'il y a autre chose qui pourrait nous aider à dire si les figures que je vous ai données sont symétriques ou pas ?
- E. ça se plie au milieu
- P. Qu'est-ce que tu entends par « ça se plie au milieu » ?
- E. On prend une feuille, sur la feuille on fait une figure ; on plie au milieu.
- P. Qu'est-ce que c'est le milieu ? Je donne une feuille à S, il va nous dire ce que ça veut dire plier la feuille au milieu.

- *Elle donne une feuille. L'élève plie en faisant attention de faire coïncider les bords de la feuille.*
  On n'entend pas bien ce que dit l'élève en pliant
- P. c'est ce qu'on appelle plier bord à bord. Vas-y.
- *Elle déchire une partie de la feuille et demande* Et là, comment on fait pour plier au milieu ?
- E. (inaudible)
- P. Est-ce que c'est encore symétrique ça ?
- E. (en chœur) Non…
- E. <u>C'est pas droit</u>
- P. *(montrant le papillon)* c'est pas droit non p
- E. <u>ça n'a pas la même forme…</u>
- P. Qu'est-ce qui n'a pas la même forme ?
- E. <u>Les deux côtés</u>
- P. Les deux côtés n'ont pas la même forme.
  Donc pour que ce soit symétrique, il faut que
  forme ?
- E. oui…
- *Elle l'écrit*



Exemple du CE2 M

M. *prend une feuille de papier, la plie en deux, ouvre pour montrer le pli, replie à nouveau, trace une forme courbe commençant au pli et s'arrêtant au pli, correspondant à peu près à un demi papillon, découpe suivant le trait et dit*
M. J'ouvre et je vous demande de me dire tout ce que vous pouvez dire sur cette nouvelle figure
E. C'est un papillon M. Autre chose
Théo. une figure fermée
E. (Stéphanie) Quand tu le plies, c'est le même, M. répète. E. c'est la moitié M. répète
M. Et quand je l'ouvre ?
F. Tu as deux figures
M. deux figures ? E. non M. Une seule figure
F. Il faut faire un trait au milieu, tu as deux fois la même forme M. répète
M. Exactement la même forme ? E. oui 2 fois la même forme ? E. oui M. Comment vérifier ?

Introduction dans le milieu d'une figure symétrique obtenue par pliage et découpage.

Mais le mot n'est pas introduit : le maître demande aux élèves de décrire la figure.
« moitié »,
« trait au milieu »,
« même forme »
introduits par des élèves dans le milieu

M. questionne « même forme »

E. Avec du papier calque
E. Puisque tu plies c'est la même, M. répète E. quand tu plies y'a pas de morceau qui dépasse.
M. répète. Mais cette histoire de 2 fois la même figure, ça m'embête un peu.
F. Tu vas à la fenêtre
M. Pour faire quoi ?
F. Pour voir que c'est bien bord à bord
Théo c'est une figure courbe (il continue mais on n'entend pas bien)
F. Si tu plies comme ça (elle montre une horizontale) ça va pas mais si tu plies comme ça c'est la même
M. J'ai bien choisi l'endroit pour plier alors ... E. ...
M. Si je trace un trait... C'est géométrique ça ?
E. une ligne droite.... E. avec la règle
E. quand tu plies ça fait comme une oreille

On n'avait pas prévu d'introduire le calque dès ce moment, c'est sans doute pourquoi le maître ne relève pas quand un élève le propose mais en fait c'est là qu'il trouverait une introduction naturelle dans le milieu : pour montrer si c'est pareil ou non et justement on trouverait que c'est presque pareil mais pas tout à fait et on retrouverait le retournement de façon très naturelle. M. sait aussi qu'il n'a jamais travaillé avec calque et que certains élèves risquent de n'en avoir aucune expérience, ce qui s'avèrera exact par la suite.
E. introduit un contrexemple

Des mots sont introduits dans le milieu par les élèves mais le M. ne les valide pas. Il a même finalement oublié d'introduire le mot « symétrique » dans son introduction et a donc des problèmes pour donner une consigne précise ensuite : il décrit l'action à faire (le moyen) au lieu du but.

III. Le langage dans les institutions

1. **Le langage et les praxéologies**
2. Praxéologies mathématiques
3. Praxéologies didactiques
4. Praxéologies de recherche

Langage et praxéologies

- Le langage est toujours présent dans les **praxéologies** :
  - Types de tâches et techniques (bloc pratique ou *praxis*)
  - Technologie et théorie (bloc théorique ou *logos*)

- Dans le bloc de la *praxis*, l'accomplissement des tâches requiert souvent la production de discours (externes ou internes) pour instrumenter ou accompagner la technique, bien qu'il puisse exister aussi de l'action sans discours

Langage et praxéologies

- Le postulat anthropologique d'existence d'un « discours » - ou *logos* - pour décrire et justifier toute *praxis* donne ainsi une présence importante à la langue comme matière première (pas unique) du bloc technologico-théorique
- Il peut exister des praxéologies avec des *logos* très réduits, car naturalisés et implicites : on sait accomplir des tâches mais on n'a rien à dire sur la raison ou la manière de les accomplir (« On fait ça comme ça, parce que »)
- Importance du langage dans les praxéologies à plusieurs acteurs (techniques coopératives)

Langage et praxéologies

- On considère le langage comme ingrédient des techniques (en articulation avec d'autres ostensifs) : « Dire c'est faire »

  Valence instrumentale des ostensifs langagiers

- La puissance du langage comme créateur et évocateur d'objets non ostensifs (*valence sémiotique*) et l'importance attribuée à ces objets dans les pratiques vues comme « intellectuelles » empêche souvent de considérer et de gérer cette valence instrumentale

Ostensifs et praxéologies

Chevallard (1994), Bosch (1994), Bosch & Chevallard (1999)

Un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une **valence *instrumentale*** et une **valence *sémiotique***. Ces deux valences apparaissant associées, *au sein* d'une praxéologie donnée, comme le recto et le verso d'une feuille.

Dire qu'un ostensif a une valence *instrumentale* signifie qu'il permet d'agir, de travailler. Dire qu'il a une valence *sémiotique* signifie qu'il permet d'évoquer d'autres systèmes d'objets (ostensifs et non-ostensifs).

Valence instrumentale du langage ?

La culture occidentale nous porte à rapprocher le discours oral de la « pensée » ou « raisonnement » et à oublier sa fonction comme outil de travail.

Sa valence sémiotique l’emporte sur l’instrumentale

Notre rapport à l’écrit est souvent l’inverse

[L]e privilège du signifiant phonique sur le signifiant graphique ne peut se légitimer qu’à partir de la distinction entre ce qui serait un dedans (où la pensée réside) et ce qui serait un dehors (où l’écriture tombe). La parole est l’expression la plus « proche » de la « conscience » – quand, même, la voix n’est pas conçue comme un quasi-effacement du signifiant.

Jacques Derrida (1967) *De la grammatologie*

La priorité de l'oral comme outil *noétique*

Current recommendations propose that 'oral and mental competence' is established 'before written calculation methods are introduced' (DfEE, 1998, p. 51). This does not mean that there will be no written recording but that children will learn to record their thinking with progressive formalization, learning first to use words to record results they can already talk about.

Anghileri, J. (2006). *Teaching Number Sense*. London: Continuum International Publishing Group. 2d edition. (p. 45)

La langue et les ostensifs

- La notion d'*ostensif* permet de situer le discours verbal dans l'univers d'instruments matériels des praxéologies, à côté des autres types d'ostensifs (symbolismes, graphismes, gestes, objets matériels) et de mettre en avant sa *valence instrumentale*, généralement effacée par sa (grande) *valence sémiotique*

III. Le langage et les institutions

1. Le langage et les praxéologies
2. **Praxéologies mathématiques**
3. Praxéologies didactiques
4. Praxéologies de recherche

Pluralité de registres ostensifs

- Dans l'activité mathématique (et dans l'activité scientifique en général), le langage naturel devient limité et se voit augmenté d'autres ostensifs (en particulier écrits et graphiques) qui viennent l'enrichir, le préciser.
- Cette « langue mathématique » contient un grand nombre d'ostensifs qui sont primairement écrits, bien que pouvant s'oraliser.
- Or la manipulation de ces ostensifs écrits est à son tour accompagnée de nouveaux discours (et gestes) qui en permettent l'organisation et le réglage.

Manipulations écrites, gestes, discours

$$8x - 3 = 5x - 17$$

$$8x - 5x = -17 + 3$$

$$3x = -14$$

$$x = -\frac{14}{3}$$

Écritures
Gestes
Discours

Soit l'équation $8x - 3 = 5x - 17$.

Ajoutons $-5x$ aux deux membres de l'équation. Nous obtenons :

$$3x - 3 = -17$$

Ajoutons 3 aux deux membres de l'équation. Nous obtenons :

$$3x = -14$$

Manipulations écrites, gestes, discours

- To *multiply monomials*, add the exponents of the same bases.

Examples: [...]

2. $(x^2y)(x^3y^2) = x^5y^3$

3. $(6k^5)(5k^2) = 30k^7$

4. $4(m^2n)(-3m^4n^3) = 12mm^6n^4$ [...]

- To *add* or *subtract polynomials*, just arrange *like terms* i
add or subtract. (Or simply add or subtract like terms v
is not necessary.)

Examples: [...]

2. $(5y - 3x) + (9y + 4x) = 14y + x$ or $x + 14y$

Les gestes sont substitués par le discours (et de nouveaux non-ostensifs) :

2. $(3x + a)(2x - 2a) =$

Multiply *first* terms from each quantity.

$(3x + a)(2x - 2a) = 6x^2$ ______

Now *outside* terms.

$(3x + a)(2x - 2a) = 6x^2 - 6ax$ ______

Now *inside* terms.

$(3x + a)(2x - 2a) = 6x^2 - 6ax + 2ax$ ______

Finally *last* terms.

$(3x + a)(2x - 2a) = 6x^2 - 6ax + 2ax - 2a^2$

Now simplify.

$(3x + a)(2x - 2a) = 6x^2 - 4ax - 2a^2$.

Différents rôles du langage

« Si à la quantité donnée
on retranche les trois cinquièmes,
on obtient les deux cinquièmes de
cette quantité.
Si les deux cinquièmes de la quantité
donnée font 16, alors cette quantité est
égale à cinq demis de 16,
soit cinq fois huit, 40. »

$$x - \frac{3}{5}x = 16$$

$$\frac{5}{5}x - \frac{3}{5}x = \frac{80}{5}$$

$$5x - 3x = 80$$

$$2x = 80$$

$$x = 40$$

Technique discursive (partiellement écrite)

Technique écrite (partiellement discursive)

Enoncé moderne

Lignes de Poncelet

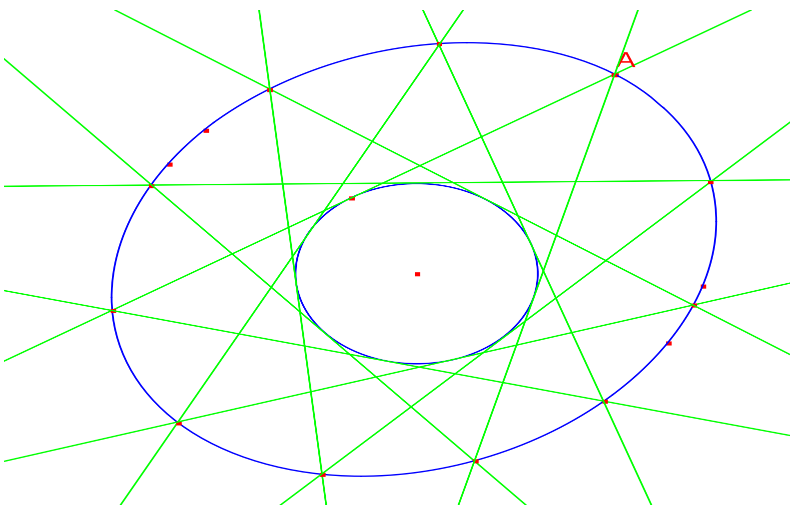
Soient Ω et C deux coniques propres du plan projectif.

On appelle **ligne de Poncelet** inscrite dans Ω et circonscrite à C une suite de points $a_i \in \Omega$ ($i \in \mathbf{Z}$) tels que, pour tout i, les droites $(a_i a_{i-1})$ et $(a_i a_{i+1})$ soient les deux tangentes à C issues de a_i.

Une telle ligne est dite **périodique** de période $n \in \mathbf{N}^*$ si l'on a $a_i = a_{i+n}$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Grand théorème de Poncelet

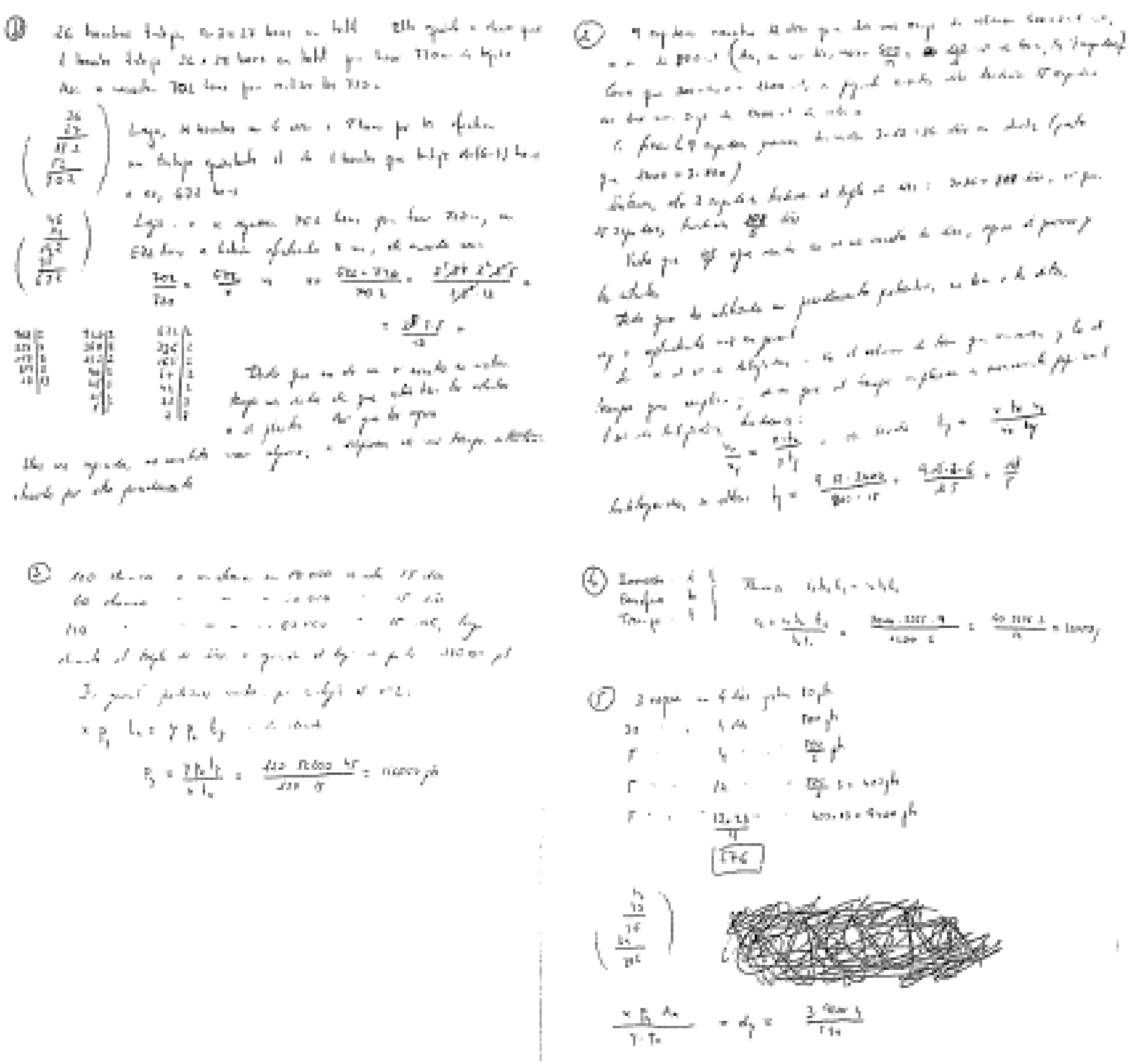
S'il existe une ligne de Poncelet inscrite dans Ω et circonscrite à C qui soit périodique de période n, toutes les lignes de Poncelet associées à Ω et C sont périodiques de période n.



Phénomène de réduction ostensive

- En général, la construction ou reconstruction de nouvelles techniques requiert la mobilisation d’une pluralité d’ostensifs appartenant à différents registres
- Lorsque les techniques se routinisent, un grand nombre d’ostensifs (en particulier langagiers) disparaissent ou s’intériorisent et ne réapparaissent qu’en cas de difficulté ou variation importante des conditions de mise en œuvre

Phénomène de réduction ostensive



Langage et [praxéologies] mathématiques

- Le discours, comme les symboles, les graphismes ou les gestes font partie de l'outillage ostensif de l'activité mathématique
- À ce titre, ils requièrent des conditions particulières de diffusion, d'usage, d'entretien
- Il faut apprendre à *oraliser* les écritures symboliques pour pouvoir les commenter et organiser ; à utiliser, choisir ou inventer les *mots appropriés* ; *à produire des discours spécifiques* ; à *articuler les ostensifs des différents registres* ; à *réduire et restituer l'épaisseur ostensive* de la praxéologie ; etc.

III. Le langage et les institutions

1. Le langage et les praxéologies
2. Praxéologies mathématiques
3. **Praxéologies didactiques**
4. Praxéologies de recherche

Langage et praxéologies didactiques

- Rôle particulier du langage courant – grâce à son grand pouvoir évocateur, signifiant, plastique, métaphorique – pour faciliter le passage d'une institution (ou de son équipement praxéologique) à une autre.

Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Œuvre

Tant que l'on ne descend pas au niveau de l'œuvre ou de la discipline, le langage courant reste suffisant

La langue courante comme outil de transition

- L'adhésion, l'assujettissement à une institution (discipline ou œuvre) - ou la résistance à y entrer - se voit aussi par la capacité ou incapacité de l'individu d'assumer d'utiliser le « langage de l'institution » (ou de l'œuvre).

  Exemple : « hétéroscédasticité »

- Lorsque l'introduction de ces emblèmes n'est pas motivée par leur utilisation en tant qu'outil, tout se réduit à un jeu de pouvoir entre institutions (on se limite à « parler comme un expert »).

Langage et paradigme pédagogique

- L'utilisation que l'on fait du langage dans la classe peut dévoiler une pédagogie scolaire qui favorise la diffusion praxéologique selon le paradigme de la « visite des œuvres », au détriment de leur présentation fonctionnelle : on privilégie la structure de l'œuvre face à sa fonction.

Le paradigme de la visite des œuvres

P : Ça s'appelle comment de se placer de l'autre côté ? Comment ça s'appelle quand on trace un morceau et qu'on trace l'autre morceau de l'autre côté. On dit que l'on … p…
E : Prolonge.
P : Prolonge. On prolonge de l'autre côté, il reste donc bien perpendiculaire à la droite D1 de l'autre côté. Et ensuite, qu'est-ce que tu fais comme travail ? On dit que l'on … y a un mot aussi pour ça. On dit que l'on …
…
P : Alors ! Quand tu mesures quelque chose et que tu le … de l'autre côté. On dit que l'on … rep …
E : Reproduit.
P : Non pas reproduit, on le…
P : On le … reporte. On le reporte de l'autre côté.

Le paradigme de la visite des œuvres

P : 360°. [Inaudible]. Oui, un demi-tour. Alors voilà l'histoire, pour reproduire cette figure F1 pour qu'elle devienne la figure F3, il faut posséder un point très important, le point O, il faut tourner autour de ce point O, et tourner de 180°, c'est-à-dire faire un demi-tour. C'est ce que vous allez écrire en bas.
Vous essayez d'expliquer vous-même ce qu'on vient de dire. Vous essayez d'expliquer par écrit ce qu'on vient de dire. Comme si vous deviez expliquer à quelqu'un. Comme si vous vous adressiez à l'un de vos camarades au téléphone. D'accord ?
Sonnerie et je récupère les copies.

Lors de la séance suivante, ce travail ne sera ni corrigé, ni commenté, ni réinvesti...

« Travail de la langue » en mathématiques

- Une autre dimension du « travail de la langue » mal perçu de la part des enseignants :

P donne un interprétation du résultat oralement

- Vous pouvez répéter ?

P résiste à répéter littéralement la phrase (« ils vont l'apprendre par cœur sans rien comprendre ») et en donne une reformulation

Instrumentalité didactique du langage

- Lorsqu'on hésite à introduire les nouveaux mots ou expressions, pour ne pas violenter l'étudiant (ou le professeur), on perd alors en instrumentalité et soudain les mots font défaut

- Exemple: AER sur les « programmes de calcul »

P : En voilà un autre : Pensez un nombre, multipliez son successeur par trois, ajoutez 5, multipliez le résultat par 4, ajoutez 16, et divisez le tout par 12.

Le non-ostensif « programme de calcul », sans référent dans le savoir savant, a du mal à émerger ; on ne pourra pas le désigner , l'autonomiser de la pratique.

Langage et [praxéologies] didactiques

- Expérimentations sur les PER : l'introduction de nouvelles organisations didactiques fait apparaître des besoins langagiers qui restent naturalisés dans les pratiques ordinaires:
  - Manque d'infrastructures mathématiques pour les discours d'institutionnalisation ; appui des professeurs sur des mots officiels (« intérêt composé », « forme canonique ») pour gérer l'avancée du PER
  - Manque d'infrastructures didactiques pour gérer la production collective de nouveaux ostensifs : notation commune (non standard), expressions *ad hoc* (« prix effectif par euro dépensé de plus »), etc.

Langage et [praxéologies] didactiques

- Expérimentations sur les PER :
  On a vu aussi fonctionner de nouveaux dispositifs didactiques qui facilitent le « travail de la langue »
  - Intégration des exposés oraux et de l'écriture de rapports dans la pratique mathématique
  - Progrès des étudiants dans la production d'exposés (oraux et écrits) sur le travail effectué
  - Le fait d'assumer la position de « sujet mathématicien » dans un discours est quelque chose qui s'apprend (et s'enseigne) ; cela fait partie de l'entrée dans l'activité mathématique (situation de formulation et d'institutionnalisation)

III. Le langage et les institutions

1. Le langage et les praxéologies
2. Praxéologies mathématiques
3. Praxéologies didactiques
4. **Praxéologies de recherche**

Langage et [praxéologies de] recherche

- Importance du « travail de la langue » dans la recherche : création de formes langagières adaptées pour échapper aux assujettissements des institutions (ou œuvres, ou disciplines) que l'on étudie, tout en gardant une certaine dénotation appropriée
- La gestion en communauté de la production et réception des nouveaux ostensifs (langagiers ou symboliques) n'est pas toujours facile…
- Mais l'analyse des praxéologies de recherche est parfois révélatrice de phénomènes moins visibles en mathématiques ou dans la classe

Langage et [praxéologies de] recherche

- Dans le cas de la TAD, les discours langagiers constituent un **matériau empirique** précieux
- Pour étudier les conditions et contraintes qui agissent sur la diffusion des praxéologies, on va voir au-delà de la classe, de l'activité de l'élève et des interactions entre élèves et professeur. Il faut explorer la noosphère et, au-delà encore, le savoir savant et les autres institutions qui surplombent l'école
- L'analyse des discours devient ainsi un outil de travail important, avec des techniques propres

Langage et [praxéologies de] recherche

- La notion de niveau de codétermination didactique permet de structurer cet univers empirique pour en faciliter l’analyse
- La civilisation, la société, l’école, le pédagogique et le didactique sont des entités que la didactique doit apprendre à observer, analyser, critiquer (ou examiner d’un regard critique)
- Et, dans cette tâche, l’analyse des discours des institutions (saisi à travers celui de leurs sujets) constitue une porte d’entrée précieuse – à condition de savoir bien les questionner…

Langage et [praxéologies de] recherche

- Les travaux de thèse de Michèle Artaud (1993), Floriane Wozniak (2005), Gisèle Cirade (2006), Caroline Ladage (2008) constituent des bons exemples d'analyses de discours institutionnels, avec une variété de techniques et de matériaux empiriques

Langage et [praxéologies de] recherche

- Exemple Wozniak (2005) : *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique*

  Contraintes au niveau de la société

  - Discours des associations professionnelles (APMEP)
  - Conférences des concepteurs des programmes
  - Ouvrages de référence qui nourrissent les programmes
  - Journaux de différentes sociétés (USA et F)
  - Ouvrages d'histoire de la discipline (démographie, biostatistique, etc.) qui conduisent bien loin dans le champ d'exploration…

Langage et [praxéologies de] recherche

- Exemple Wozniak (2005) : *Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique*

  Contraintes au niveau de la civilisation

  - Extraits de l'Ancien Testament (*Pentateuque)* sur les malédictions qu'impose Yahvé à David pour les recensements ou dénombrements d'hommes (« On ne peut compter des hommes comme on compte des troupeaux »)

Langage et [praxéologies de] recherche

« La mémoire collective gardera longtemps le souvenir de la malédiction attachée au dénombrement, la civilisation occidentale n'en acceptera le principe qu'avec difficulté. Au Moyen Âge chrétien saint Ambroise et saint Augustin condamneront le péché d'orgueil commis par David. »

Hecht, J. (1977). L'idée de dénombrement jusqu'à la Révolution. *Pour une histoire de la statistique*, tome 1 (pp. 21-83). Paris : Economica

Langage et [praxéologies de] recherche

- Ladage (2008) : *Écologie et économie des praxéologies de la recherche d'information sur internet*
  - Notion d'« exposé » : écrit sur une œuvre
  - Opposition entre « lecture inventoriante » et « lecture questionnante » d'un exposé (dialectique de l'inscription et de l'excription)

« Tout texte porte en lui des questions auxquelles les assertions (ou les présuppositions, ou les renvois) qu'il contient sont des réponses ou des fragments de réponses »

IV. Conclusions

En guise de synthèse

- Le langage est pris dans l'activité mathématique, il en fait partie. Il n'est pas (uniquement) un moyen d'accès au savoir mathématique.
- Les deux théories soulignent le caractère instrumental de la langue en l'intégrant dans le système d'ostensifs activé.
- On ne peut pas séparer le langage du reste des composants de l'activité mathématique, qu'on les conçoive comme des connaissances/savoirs (situations) ou comme des praxéologies
- La construction de nouvelles connaissances / praxéologies passe par la construction de nouvelles manières de dire (et de faire), sans s'y réduire.

En guise de synthèse

- Dans la TS, un questionnement majeur est celui de l'utilité des connaissances et des conditions de leur émergence. Ces connaissances sont inséparables du langage dans lequel on peut les exprimer. Mais elles s'expriment aussi à travers des actions, des décisions, sans langage. Le langage émerge avec les connaissances mais un langage efficace n'émerge pas toujours tout seul, d'où l'importance de la dialectique de la formulation et l'intérêt de mettre en place des situations de formulation quand l'enjeu en vaut la peine.

En guise de synthèse

- Le langage intervient aussi au niveau de la relation didactique ; il s’analyse alors en référence aux fonctions didactiques qu’il remplit et en lien avec toutes les composantes de la situation, que ce soit le milieu ou les règles du jeu.
- Avec la notion de milieu, la TS intègre dans la modélisation la partie du contexte sur laquelle porte l’activité mathématique ou qui y contribue, c’est-à-dire la partie du contexte qui, avec le langage, fait partie intégrante de l’activité mathématique.

En guise de synthèse

- Dans la TAD, un questionnement majeur est l’étude de l’écologie des praxéologies mathématiques et didactiques, c’est-à-dire les conditions et les contraintes de leur émergence, diffusion, évolution, disparition, etc.
- L’écologie des ostensifs – et en particulier des ostensifs langagiers – qui instrumentent les praxéologies constitue à ce propos un élément clé de l’écologie praxéologique, surtout lorsqu’on prend en compte le traitement différencié des ostensifs des différents registres

En guise de synthèse

- Le paradigme de la visite des œuvres peut conduire à « sacraliser » les ostensifs langagiers les plus emblématiques de la praxéologie et à privilégier leur valence sémiotique face à leur valence instrumentale
- La prise en compte de cette valence instrumentale demande le recours à des dispositifs appropriés pour faciliter le « travail de la langue » spécifique de chaque discipline

Question à M. A. Mariotti

- Comment situer les « artefacts » (TSM) dans la problématique des ostensifs ? Peut-on les considérer comme outils de l'activité mathématique ou seulement comme des médiateurs entre la pratique du sujet et le savoir mathématique ? Peut-on parler d'un savoir mathématique « sans artefacts » ?

Question à M. Rebière

- La théorisation en termes de « concepts quotidiens » et « concepts scientifiques » semble rabattre sur la dimension conceptuelle (« savoir ») au détriment de la pratique ? La théorisation en termes de « genre premier » et « genre second » diffère-t-elle à ce niveau ? N'accorde-t-on pas une grande importance à la « reproduction du discours scientifique » (donner des explications, des justifications) au détriment de la recherche ou la résolution de problèmes ?
- Langue naturelle et transition entre pratiques ?

À partir de l'exposé de V. Durand-Guerrier

- Comment prend-on en compte la formulation dans l'étude des situations de validation ?
- L'analyse en termes d'ostensifs telle qu'elle a été initiée par Chevallard (1991) et Bosch (1994) s'est centrée initialement sur le rôle des ostensifs dans le bloc pratique des praxéologies (instrumentation de la technique, rôle descriptif de la technologie). Comment peut-elle s'étendre pour aborder leur rôle dans le bloc théorique, en particulier comme instruments de justification et validation ? Phénomènes de « sensibilité » aux ostensifs…