Résumé du TD2 par T. Barrier et V. Durand-Guerrier

Carl Winsløw, Julianna Zsidó

26 août 2011

Le but de cette partie des TD était de se familiariser avec les règles pour la déduction naturelle, formulés par Copi, et leur rôle possible dans l'analyse et dans l'intervention didactique.

A cette fin, les animateurs ont d'abord rappelé ces règles, au nombre de quatre, gouvernant l'élimination et l'introduction des deux quantificateurs ($\forall$ et $\exists$). Par exemple, ces règles empêchent le passage, par le biais d'élimination suivi d'introduction de quantificateurs, d'une proposition de type $\forall x \exists y F(x, y)$ à la proposition $\exists x \forall y F(x, y)$.

Ensuite on a étudié une démonstration (fausse), par un étudiant de licence, de la proposition (vraie) qui dit que pour deux sous–ensembles A et B d'une espace métrique dont A et fermé et B et compact, on a $d(A, B) \neq 0$ si $A \cap B = \emptyset$. L'étudiant part correctement de l'hypothèse $d(A, B) = 0$ pour montrer que $A \cap B \neq \emptyset$. Or, en route il se produit plusieurs bizarreries. Les participants étaient alors invités à repérer plus précisément ces erreurs à l'aide des outils fournis par les quatre règles de Copi, et de discuter ensuite comment cela pourrait éventuellement servir pour guider l'étudiant en question, ou l'enseignement du début du supérieur plus généralement.

Au bilan, on a d'abord repéré que effectivement l'étudiant se trompe dans son jeu largement implicite sur les quantificateurs, où il utilise d'abord la définition de $d(A, B) = 0$ pour dire que pour tout ε on peut trouver x et y dans A et B respectivement, tel que $d(x, y) < \varepsilon/2$. Eliminant (implicitement) ε et ensuite x et y, il travaille avec cette inégalité pour arriver finalement à une suite $(x_n) \subset A$ et un n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $d(y, x_n) < \varepsilon/2$. Il en conclut que $x_n \to y$ et donc que y et dans la clôture de A, c'est–à–dire dans A, et donc dans l'intersection $A \cap B$. La seule erreur (ce qui n'est pas dire la seule faute ou méprise !!) se trouve dans l'interférence que $x_n \to y$, comme cette dernière proposition entraîne la réintroduction de $\forall\varepsilon$ même si y dépend manifestement de ε, et aussi on réintroduit implicitement par la suite $\exists y$ en soutenant que y est un élément de B qui au même temps est dans la clôture de A.

Les participants ont en outre signalé l'usage bizarre de l'implication dans cette copie d'étudiant et de la définition d'ensemble fermée. L'absence de texte dans la rédaction contribue à la difficulté de suivre la pensée de l'étudiant en question et on s'est demandé comment corriger sa copie.

A la fin de cette séance, les animateurs ont brièvement exposé leur expérience en enseignant les règles logiques en question à des étudiants de 2ème et de 3ème année de licence, dans une université française, et comment cela avait aidé leurs étudiants à repérer des erreurs et abus dans des démonstrations de la théorème de Bolzano–Weierstrass. Ils ont en outre signalé l'hypothèse qu'au moins les abus implicites de ces règles sont assez répandues dans les manuels et polycopiés que l'on utilise à ce niveau de l'enseignement universitaire.