Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski.

Viviane DURAND-GUERRIER

IUFM DE LYON & LIRDHIST-UCBL LYON1

vdurand@univ-lyon1.fr

> « Dans une mathématisation complète, on s’assure qu’un fait est vrai sur une base expérimentale, puis on s’assure que dans la théorie qu’on a bâtie par ailleurs, on peut déduire le fait en question. » (Chevallard, 2004, p.35).

I. Introduction

Comme l'écrit Margolinas (1993) "[Le] lien crucial entre mathématiques et vérité apodictique place le point de vue de la validation au centre des problèmes d'enseignement des mathématiques" (p.24). Cette question a fait l'objet de nombreux travaux de recherche et a donné lieu à des innovations pédagogiques comme *Le problème ouvert* (Arsac & al, 1991*)*, *Le débat scientifique* (Legrand, 1993) ou les travaux de l'équipe *ERMEL* (1999). La plupart des chercheurs et expérimentateurs mettent en avant la difficulté de gestion par les professeurs des phases de conclusion. Se pose en particulier de manière cruciale la question de savoir comment concilier l'autonomie de l'élève, et partant la relative "neutralité" de l'enseignant d'une part, et la nécessité de la conformité des résultats stabilisés avec les savoirs mathématiques de référence d'autre part. En nous appuyant sur les travaux que nous conduisons depuis de nombreuses années sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique, nous faisons l'hypothèse qu'une centration excessive sur le rôle du contre-exemple dans l'activité de preuve en mathématiques, au détriment de la recherche du domaine de validité des conjectures émises, est, pour partie, à l'origine de ces difficultés. Nous organiserons notre communication suivant deux parties. La première partie consistera en un retour sur le *Schéma de la validation explicite* proposée par Brousseau (1998 pp.109-112). Si la modélisation en tant que "Proposant et Opposant" renvoie au *modèle de* Lorenzen *pour la situation de preuve* (Lorenzen, 1967) la complexité du schéma proposé par Brousseau montre que les enjeux vont bien au-delà. Nous essayerons de montrer que la *Théorie élémentaire des*

Modèles, initiée par Tarski (1960) prolongeant ses travaux sur une *définition sémantique de la vérité* permet une relecture de ce schéma explicitant en particulier ce que l'on peut entendre par " La théorie elle-même est objet d'étude et de construction" (Ibid. p. 111). Dans la deuxième partie, nous illustrerons notre propos à l'aide de deux exemples. Le premier est un exemple de ce que nous avons convenu d'appeler *centration excessive sur le contre-exemple* ; le second est un exemple de *travail de la théorie* en situation de résolution de problème. Avant de conclure, nous poserons la question de la complémentarité des deux références épistémologiques étudiées.

II. Le schéma de la validation explicite (Brousseau, 1998)

II.1. Trois catégories de situations adidactiques

Le schéma de la validation explicite proposé par Guy Brousseau dans l'article : 'Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques' (Brousseau, 1986, 1998) se trouve au paragraphe 6 intitulé 'Les situations adidactiques '. Selon l'auteur
« Les relations d'un élève avec le milieu peuvent être classées en au moins trois grandes catégories :

- les échanges de jugement [3],
- les échanges d'information codées dans un langage [2],
- les échanges d'informations non codées ou sans langage : les actions et les décisions qui agissent directement sur l'autre protagoniste [1]. » (p. 98[1])

Il précise en note que « ces numéros renvoient tous au même type d'hypothèse : [1] Action, [2] Formulation, [3] Validation[2]. Ceci donne lieu à trois types de situations adidactiques qui font l'objet d'une première étude au sous-paragraphe 6-3 (pp. 104-112). On trouve tout d'abord la description de la grille de lecture d'une situation réelle d'enseignement fournie par le modèle général de l'action, dont les conditions limites - considérer *la validité d'une solution* - conduisent à une situation de validation ; le schéma de la communication, dont le milieu comprend un système récepteur et/ou émetteur pour lequel l'auteur suppose que « l'objet de ces messages n'est pas d'agir sur le récepteur (…) mais d'*agir* par son intermédiaire sur le dispositif « milieu ». » (p.106). L'auteur souligne l'intérêt de ce type de

[1] Les numéros de page renvoient à Brousseau, 1998.
[2] Brousseau indique que ce troisième terme *n'est pas très heureux*, mais sans préciser en quoi.

situation pour développer l'usage d'un langage mathématique précis et favoriser l'apparition de messages ayant une forme très proche du discours mathématique. Cependant, même lorsqu'il y a deux joueurs, l'enjeu d'une situation de communication ne porte pas sur la vérité ou la validité. Ce sont les situations de validation qui assument ce rôle. Pour cela, Guy Brousseau introduit la notion de Proposant et d'Opposant qu'il emprunte à Lorenzen (1967) et ce, bien que cette référence n'apparaisse pas dans le texte. Le lien entre la théorie des situations didactiques et le modèle de Lorenzen fait l'objet du chapitre III de Locia Espinoza (2000) et est indiqué par Guy Brousseau dans le texte de la conférence donnée en Juin 1997 à Montréal[3] où il écrit : « En conjuguant l'approche de Turing et celle de Lorenzen qui semblaient pourtant irréductiblement opposées, il a paru possible de représenter les situations à usage didactique par des « automates mathématiques ». (op.cit p.4)

II.2. Le modèle de Lorenzen

Selon Locia Espinoza,

> « La théorie des situations est issue des travaux de Paul Lorenzen (1967) sur la « logique effective » (…). Sa méthode a été inspirée par l'interprétation opératoire des particules logiques de Gentzen (1934). Elle produit une logique dont Heyting a montré qu'elle est équivalente à la logique intuitionniste.» (Locia Espinoza, 2000, p. 38).

Il en présente alors rapidement les idées principales concernant son objet d'étude, à savoir « les contre-exemples dans l'enseignement des mathématiques ».

Les deux points cruciaux du modèle de Lorenzen concernent : a) le refus de l'extension de la logique des propositions (qu'il appelle logique des joncteurs) et qui concerne les énoncés *v.définis* (qui ont une valeur de vérité) aux énoncés quantifiés sur un domaine infini, ce qui le conduit, à l'instar de Brouwer, à refuser qu'un énoncé tel que « il y a des nombres impairs parfaits ou aucun nombre impair n'est parfait » soit logiquement vrai ; b) corollairement le refus de la loi de Morgan qui affirme l'équivalence logique entre « non (a et non a) » et « a ou non a » pour les énoncés qui ne sont pas *v.définis*. Il faut noter que sur ce point, il s'oppose à des auteurs comme Aristote, qui affirme : « 'il y aura une bataille navale demain, ou il n'y aura pas de bataille navale demain, voilà ce qui est nécessaire » (Aristote, II.9, 19a, 25-35), ou

[3] Le texte de cette conférence est disponible à l'adresse suivante : http://perso.wanadoo.fr/daest/guy-brousseau/

encore Quine (1990, 1993) qui écrit : « (…) ignorer la vérité d'un énoncé ou ignorer sa fausseté sont à égalité au départ et pleinement en accord avec le fait qu'il soit vrai ou faux[4]. »
Le point de vue adopté par Lorenzen le conduit à introduire les propositions *p.définies*, pour lesquelles on sait reconnaître une procédure de décision pour la vérité (preuve), comme, par exemple « il existe un nombre parfait impair » (pour lequel une preuve est la production d'un entier n égal à la somme de ses diviseurs stricts). Les propositions construites à l'aide des connecteurs propositionnels (*non*, *et*, *ou*, *si,… alors*, *si et seulement si*) à partir de propositions *p.définies* sont encore *p.définies* ; c'est aussi le cas des propositions existentielles sur un domaine infini assimilées à une disjonction infinie, mais ce n'est évidemment pas le cas des propositions universelles sur un domaine infini, assimilées à une conjonction infinie de propositions *p.définies*. Pour ces dernières, il introduit une notion plus large ; celle de propositions *d.définies*, c'est-à-dire « *définies au sens du dialogue* » :

> « Imaginons deux personnes, dont la première affirme $\bigwedge_x a(x)$[5]. La seconde est alors en droit de choisir à volonté un nombre naturel n. Si la première personne peut fournir la preuve qui correspond à $a(n)$, elle a gagnée. Sinon, elle a perdu. L'issue du dialogue est ainsi toujours déterminée et c'est pourquoi on peut considérer les propositions universelles comme *d.définies*. D'une façon générale, une proposition sera dite *d.définie* si, pour la soutenir dans un dialogue, les règles des deux partenaires sont déterminées de telle sorte qu'on peut décider à chaque instant (1) si le dialogue est terminé et (2) qui dans ce cas a gagné. « Je passe » n'est pas autorisé. » (p.21)

Lorenzen utilise cette définition pour montrer que la négation d'une proposition *d*.définie est *d*.définie et que si l'on joue « non (a et non a ») où a est une proposition *d.définie*, celui qui commence (le proposant, noté P) pourra toujours gagner contre son adversaire (l'opposant, noté O), tandis que si l'on joue « a ou non a », le proposant P ne peut gagner que s'il sait soit (1) comment prouver a, soit (2) que l'opposant ne peut pas prouver a. Le premier cas correspond à ce qu'il appelle « la vérité logique effective » d'une forme propositionnelle :

> « Nous dirons qu'une forme propositionnelle est *logiquement vraie de manière effective* si et seulement si il est possible de gagner dans un dialogue toute proposition de cette forme contre tout opposant. » (p.23)

---

[4] Pour une discussion du principe du tiers exclu et sa pertinence pour la didactique des mathématiques, voir Durand-Guerrier, 1996, chapitre 5.
[5] C'est-à-dire « Pour tout x, a(x) ».

Il définit alors ce qu'est une stratégie de gain pour le proposant *P*, et déclare que c'est dans ce cas-là et dans ce cas seulement qu'il peut affirmer *la vérité logique effective* de sa première proposition.

À partir de ce modèle construit *a priori* pour établir des *lois logiques effectives* , Lorenzen montre qu'on peut définir ce qu'il appelle « une déduction logique en logique effective ». On dira que B découle logiquement de manière effective de plusieurs prémisses *A1, A2,...Ar,* si un proposant *P* peut soutenir cette proposition *B* contre tout opposant qui de son côté est disposé à soutenir les prémisses *A1, A2,...Ar* (op.cit. p..31). Brousseau (1998) utilise ce modèle pour modéliser des jeux à deux joueurs (par exemple *la course à 20*) pour lesquels l'enjeu de vérité porte sur des énoncés mathématiques et non plus sur des énoncés logiques. Ce n'est évidemment pas un hasard si le modèle de Lorenzen s'applique *aux jeux à stratégie gagnante* dont *la course à 20* fait partie.

Relativement à notre propos, deux questions principales se posent à l'issue de ce rapide tour d'horizon du modèle de Lorenzen. La première est celle de savoir dans quelle mesure le fait que ce modèle rejette le principe du tiers exclu a, ou non, des incidences sur le schéma de la validation explicite proposé par Brousseau. La seconde concerne la possibilité de prendre en compte dans ce modèle le domaine de validité d'un énoncé, ceci compte tenu du fait que dans le modèle de Lorenzen, les éléments du dialogue sont nécessairement des phrases closes (c'est-à-dire sans variable libre). Nous reviendrons sur ces deux questions au paragraphe V.

II.3. Le schéma de la validation explicite

Dans le schéma de la validation explicite (ou schéma de la preuve), l'émetteur devient un proposant et le récepteur devient un opposant ; on est en présence d'un enjeu de vérité et il s'agit « de rattacher de façon sûre une connaissance à un champ de savoirs déjà établis. (Brousseau, Conférence de Montréal[6], p.8).

> « Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produit d'une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d'autre part. Les deux joueurs échangent des assertions, des

[6] Le texte de cette conférence est disponible à l'adresse suivante : http://perso.wanadoo.fr/daest/guy-brousseau/

preuves et des démonstrations à propose de ce couple milieu / message » (Brousseau, 1998, p. 109)

Dans la description du jeu de la preuve donnée par Brousseau, il n'apparaît pas clairement de quels moyens on dispose pour *décider que le dialogue est terminé*, ni si la situation de validation permet de *garantir que les joueurs vont parvenir à un accord qui soit conforme aux savoirs mathématiques en jeu*.

On peut regarder à cet égard les quatre stratégies de gain possibles concernant les énoncés quantifiés (selon qu'ils sont déclarés par le proposant ou par l'opposant) dans le modèle de Lorenzen. Supposons que *P* déclare (E) « Pour tout *x*, A(*x*) »; pour mettre en doute cette proposition, l'interlocuteur *O* doit proposer une valeur *n*, dont il espère que ce sera un contre-exemple ; le premier doit alors exhiber une preuve de A(*n*), sinon, il a perdu. Plaçons nous dans le cas où *P* a perdu, faute de pouvoir prouver A(*n*) pour un certain *n*. Quelle est maintenant la conclusion que l'on peut en tirer quant à la vérité de l'énoncé ? Aucune évidemment : ce n'est pas parce que *P* n'est pas capable de prouver A(*n*), que *n* constitue un contre-exemple à l'énoncé. L'opposant est engagé ici dans un processus de réfutation. Brousseau propose deux types de réfutation : (1) pragmatique ; (2) individuelle. La réfutation *pragmatique* consiste à ce que l'opposant *B* « oblige » le proposant *A* à jouer un coup perdant, et ce aussi souvent qu'il a la main jusqu'à ce que le proposant retire sa déclaration (ibid. p. 111). On voit ici apparaître une difficulté : si le proposant *A* ne reconnaît pas que les coups perdants sont des contre-exemples, il n'a pas de raison de retirer sa déclaration, et le jeu pourrait ne pas s'arrêter. La réfutation *intellectuelle* consiste pour l'opposant *B* à proposer une réfutation de la déclaration du proposant *A* ; si *A* accepte, *B* devient le proposant ; *A* peut accepter ou non la réfutation (ibid. p. 111). Pour un énoncé du type (E), une réfutation en logique classique est l'affirmation de l'énoncé (F) « Il existe *x* non A(*x*) » ; pour soutenir cette déclaration, en logique effective, il faut produire un exemple. Il se peut cependant que *A* ne veuille pas retirer sa déclaration, et ce quoiqu'il accepte l'exemple proposé ; il cherche par exemple à sauver son énoncé en éliminant les exceptions[7]. Ceci renvoie à Lakatos (1976, 1984). Il se peut aussi que les exemples proposés par *B* ne conviennent pas, soit parce que

[7] Par exemple, il propose d'éliminer tous les multiples de *11* pour conserver l'énoncé « *n*x*n* - *n* + *11* est toujours un nombre premier » (Durand-Guerrier, à paraître en 2005 in «Durand-Guerrier & al.(eds) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe*.

l'énoncé (E) est vrai sur le domaine considéré, soit parce que *B* « n'a pas chance ». Le dialogue pourrait à nouveau ne pas s'arrêter.

En fait, il faut reconnaître que cette analyse dans le modèle de Lorenzen ne rend pas justice au modèle proposé par Brousseau, comme l'écrit Locia Espinoza :

> « Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, les situations de preuve sont beaucoup plus complexes que dans le modèle de Lorenzen. » (op.cit. p. 50).

En effet, parmi les messages échangés par les joueurs, se trouvent non seulement des assertions et des réfutations, mais aussi des preuves et des démonstrations, ce qui n'est jamais le cas dans le modèle de Lorenzen. En outre,

> « Toutes les assertions de la théorie sont susceptibles de se voir explicitées et remises en question. La théorie elle-même est un objet d'étude et de construction » (Brousseau, 1998, p. 111)

Cette dernière phrase montre selon nous que le schéma de la validation explicite échappe très largement aux analyses permises par le modèle de « la logique effective » de Lorenzen[8], et s'interprète mieux, pour certains de ses aspects, dans la théorie des modèles de Tarski. C'est ce que nous allons essayer de montrer maintenant.

III. Théorie des modèles et validation

III.1. Éléments de théorie des modèles.

Comme ceux de Lorenzen, les travaux de Tarski concernent ce qu'il est convenu d'appeler la métamathématique. L'originalité de ces travaux est soulignée par Granger dans la préface à la traduction française des principaux articles de Tarski (Tarski, 1972). Dans un article de 1936, Tarski introduit la *définition sémantique de la vérité* pour laquelle il introduit les notions fondamentales de *satisfaction d'une formule,* de *conséquence logique* et de *définissabilité.* Au cœur de ce travail d'élaboration, se trouvent les notions de *fonction propositionnelle* et *d'interprétation d'une fonction propositionnelle* d'un langage donné dans un « domaine de réalité » par une phrase ouverte. On dira :

Pour tout a, a satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc » si et seulement si a est blanc.

De ceci, on peut inférer que la neige satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc ». D'où

[8] Il faut noter que Lorenzen (1967) ne se limite pas à la présentation de la logique effective ; il établit un certain nombre de résultats qui dépassent largement le cadre des questions qui nous intéressent ici.

la proposition « la neige est blanche » est vraie si et seulement si la neige est blanche.

C'est ce que l'on appelle communément *la convention T*. Tarski met cette définition de la satisfaction en rapport avec les constructions mathématiques dans l'algèbre scolaire concernant « les fonctions propositionnelles d'un type spéciale dites équations et où l'on appelle racines des équations les nombres qui satisfont ces fonctions » (Tarski, 1972, p. 193). Tarski fait remarquer que, dans cette définition, les propositions sont traitées comme des entités linguistiques et qu'il convient de tenir les noms entre guillemets pour des noms singuliers d'expression, faute de quoi cette définition pourrait donner l'apparence de l'erreur. (ibid., note 5, p.163). On a alors besoin d'un métalangage, ou d'une métathéorie, pour pouvoir parler des énoncés du langage ou de la théorie dans laquelle on travaille. Cette élaboration d'une théorie sémantique de la vérité s'inscrit dans un projet général qui vise à établir un rapport original entre forme et contenu :

> « (…) il n'est pas plus question de renoncer aux avantages de la formalisation et de l'analyse syntaxique permise par cette dernière qu'à l'exigence d'en réinvestir les résultats au niveau des contenus mathématiques, à leur donner une interprétation mathématique concrète » (ibid., p.313).

À partir de la notion de satisfaction d'une formule par un élément ou une suite d'éléments, il définit la notion de modèle d'une formule : un modèle d'une formule est une structure interprétative dans laquelle l'interprétation de cette formule est un énoncé vrai. Ceci conduit à la notion de formule *universellement valide*, qui généralise la notion de *tautologie* due à Wittgenstein (1921) : une formule est universellement valide si et seulement si elle est vraie dans toute interprétation adéquate. Ceci s'étend à un ensemble fini de formules et permet de définir la notion sémantique de conséquence logique : une formule G est conséquence logique d'une formule F si et seulement si tout modèle de F est un modèle de G. L'articulation entre formule d'un langage formalisé et interprétation dans un « domaine de réalité », qui peut être une théorie mathématique, est le fondement de la « Méthodologie des sciences déductives », qui deviendra ensuite la Théorie des Modèles. On en trouve une présentation élémentaire dans l'ouvrage didactique : « Introduction à la logique » (Tarski, 1960). Étant donnée une théorie déductive (termes primitifs et termes définis, axiomes et théorèmes), on lui associe un système axiomatique formel pour lequel on pourra considérer des réalisations ou modèles, c'est-à-dire des domaines d'objets dans lesquels les interprétations des axiomes sont vraies. Un premier modèle est, naturellement, constitué par les objets dénotés par les termes primitifs de la première théorie. Cependant, une fois le système axiomatique construit, ce modèle (celui de la théorie initiale) ne joue aucun rôle particulier, ce n'est qu'un modèle parmi d'autres. Les conséquences pour la déduction de ce que Tarski met en place sont tout à fait fondamentales. En effet :

> « Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie ; et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre » (ibid, p.112)

Une conséquence immédiate de ce théorème est que :

> « Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (ibid., p.112).

Le théorème de la déduction est également le fondement de toutes les méthodes de preuve par construction d'un modèle appelées aussi preuves par interprétation. Pour prouver qu'un énoncé donné de la théorie n'est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la fonction propositionnelle associée à cet énoncé. Il est tout à fait clair que si l'on excepte les cas où la négation de l'énoncé considéré est conséquence logique des axiomes, il existe également des modèles dans lesquels cet énoncé est vrai.

Dans la théorie élémentaire des modèles de Tarski, et contrairement à ce qui se passe dans le modèle de Lorenzen présenté ci-dessus, c'est l'articulation entre forme (dans les langages formalisés) et contenu (dans les théories mathématiques) qui se trouve au cœur des outils d'étude de la validité. La logique de référence est la logique classique (et non plus la logique intuitionniste), et l'on ne travaille pas seulement avec les énoncés, mais également avec les théories. En particulier, si on travaille dans le calcul des prédicats et que l'on donne aux quantificateurs et aux connecteurs logiques leur signification habituelle, le principe du tiers exclu est valide. Plus précisément, les énoncés : (1) « $p(x)\vee\neg p(x)$ », (2) « $p(a)\vee\neg p(a)$ », (3)« $\forall x(p(x)\vee\neg p(x))$ », (4) « $(\forall x\ p(x))\vee\ \exists x\ (\neg p(x))$ » sont des énoncés universellement valides. La théorie des modèles apparaît ainsi comme *une logique d'objet* ; la valeur de vérité d'un énoncé logique, ou mathématique, est indépendante de l'activité des sujets, tandis que dans la logique effective, la valeur de vérité d'un énoncé est soumise à l'activité *du sujet*. Lorenzen, dans la préface à Lorenzen (1967), pose clairement que la logique effective rejette la logique classique redécouverte par Frege et se situe du côté de la logique intuitionniste[9] et des mathématiques constructives, qui sont l'apanage presque exclusif des intuitionnistes, tandis que la théorie sémantique de la vérité de Tarski se situe du côté de la logique classique et des mathématiques axiomatiques. Sinaceur (1991a) qui a montré de façon magistrale la fécondité de l'approche modèle-théorique en mathématiques soutient que :

> « La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie.(…) Une part essentielle de l'analyse épistémologique est ainsi ouvertement prise en charge par l'analyse logique ; (…) En même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir » (Sinaceur, 1991b)

Dans notre propre travail, nous avons montré la pertinence de la théorie élémentaire des modèles pour étudier, dans une perspective didactique, l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique (Durand-Guerrier, 2004, 2005). Nous avons également montré qu'on pouvait aisément réinterpréter la notion de théorème en acte (Vergnaud, 1991) dans ce cadre[10].

Nous pensons en outre que les mathématiques dont il est question dans la théorie des situations didactiques sont plutôt du côté des mathématiques axiomatiques et de la logique classique et que par conséquent la théorie des modèles de Tarski est également ici une référence épistémologique pertinente, ce que nous allons essayer de montrer.

III.2 Retour sur le schéma de la validation.

Dans la présentation des formes de connaissances qui permettent de « contrôler » *explicitement* les interactions du sujet relatives à la validité de ses déclaration, Guy Brousseau retient principalement « ses savoirs exprimables et reconnus comme tels par le milieu ». Il ajoute : « Ils sont organisés en théories, en démonstrations et définitions bien déterminées sous leur forme culturelle la plus achevée » (Brousseau, 1998, p.100). Il considère en outre que :

---

[9] Heyting a démontré que la logique effective de Lorenzen et la logique intuitionniste sont équivalentes.
[10] Durand-Guerrier, V., à paraître en 2005 dans les actes du colloque ARDéCO.

« (…) il est utile de conserver la distinction faite en logique entre l'énoncé considéré comme une expression bien formée ou comme un ensemble de réalisations et l'assertion qui enclôt cet énoncé dans une déclaration métathéorique sur sa validité, sur un domaine donné ou sa déductibilité d'un système d'axiomes. En généralisant cette distinction, un jugement est compose :

- d'une description ou modèle exprimé dans un certain « langage », ou (dans une certaine « théorie ») renvoyant éventuellement à « une réalité » (c'est-à-dire au dispositif du jeu en cours).

- Et d'un jugement sur l'adéquation de cette description, sur son caractère de contingence ou de nécessité ou sur sa consistance au regard des connaissances du sujet ou du milieu. » (p. 100)

Cette citation montre clairement selon nous que le point de vue adopté concernant les mathématiques est un point de vue *axiomatique*, et non pas *constructiviste* (au sens des intuitionnistes) avec la notion de déductibilité, qui, dans l'enseignement français à tout le moins, réfère à la logique classique. Les questions de contingence, de nécessité et de consistance au regard d'un corps de connaissances stabilisées sont précisément des questions auxquelles la théorie des modèles de Tarski apportent des réponses. Rappelons d'ailleurs que dans les premières présentations, Tarski appelle *Méthodologie des Sciences Déductives* ce qu'il est en train d'élaborer (Tarski, 1960). Nous avons illustré ailleurs, sur un exemple très simple, comment mettre en oeuvre cette méthode pour traiter les questions de nécessité logique, en lien avec les questions de certitude[11].

IV. Deux exemples pour illustrer notre propos

IV.1 Un exemple de « centration excessive sur le contre-exemple ».

La situation qui va nous servir d'exemple a été proposée par Guy Brousseau en 1988 dans une classe de CM2 de l'école Michelet, et analysée par Patrick Gibel dans sa thèse (Gibel, 2004). L'énoncé en est le suivant :

« Soient cinq nombres naturels *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Quel est le plus grand nombre que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires : $\{+, -, \times, \div\}$ appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois ? » (Gibel, 2004, p.87)

[11] Durand-Guerrier, V. à paraître en 2005 dans les actes du colloque ARDéCO.

La spécificité de ce problème est de faire apparaître une première méthode (que nous notons Ma) qui ne vaut que pour les entiers supérieurs ou égaux à deux : le plus grand nombre s'obtient en faisant le produit des cinq nombres. Ceci ne convient plus dès qu'il y a soit des 0, soit des 1 dans la suite de nombres proposée. Le cas des zéros est réglé facilement (on ne s'en occupe pas, ou on les ajoute à la fin du calcul). Le cas des suites contenant des « 1 » est plus délicat car il faut distinguer plusieurs cas. La méthode qui semble convenir a priori (que nous notons Mb) consiste à ajouter 1 au plus petit nombre non nul ; à recommencer éventuellement jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de « 1 », et faire ensuite le produit des nombres obtenus. Par exemple, avec la suite 8, 7,1,1,1 , on calcule1+1 ; on obtient 2 ; puis 2+1, on obtient 3 ; on fait le produit $3\times7\times8$; avec la suite 1,1,1,1,1, on calcul 1+1, on obtient 2 ; à nouveau 1+1, on obtient 2 ; 2+1, on obtient 3 ; on fait le produit 3×2. Cependant cette méthode ne marche ni avec les suites de la forme (1,1,2, 2, e) ni avec la suite (1,1,1,1,2).

La situation proposée est décrite comme *une situation adidactique de preuve* qui, conformément au schéma de la validation explicite, s'appuie sur une situation d'action et sur une situation de formulation. La séquence de classe analysée, dont la transcription complète se trouve en annexe de la thèse, se déroule sur trois séances ; nous nous intéressons ici à la séance n°2, qui constitue une situation de validation. A la fin de la séance précédente, les élèves ont abouti à plusieurs formulations de la méthode Ma, dont la formulation la plus générale que nous avons donnée, appelée méthode d'Aline (et les douze). Au début de cette séance n°2, les élèves sont en groupe et doivent élaborer une méthode pour trouver le nombre le plus grand dans tous les cas. Lors de la phase de mise en commun, deux nouvelles méthodes sont explicitées par les élèves et mises en débat. On a alors trois méthodes écrites au tableau :

M1 (*Aline 1* (et les douze)) : *On multiplie tous les nombres entre eux* (proposée à la fin de la séance n°1 et restée au tableau)

M2 (*Aline 2*[12]) : *On multiplie tous les nombres entre eux dans n'importe quel ordre, sauf avec le 0 et le 1 on fait plus*.

M3 (*Anne*[13]) : *On multiplie tous les nombres entre eux, sauf quand il y a un ou plusieurs 1, on l'additionne ou on les additionne avec le nombre le plus grand et on multiplie tout après*.

Une élève (Elsa) indique qu'elle avait opté pour M2, mais change de point de vue pour adopter M3 en donnant une justification. Anne indique à Elsa que son groupe a fait des essais

[12] Il s'agit du groupe d'Aline.
[13] Il s'agit de la méthode du groupe d'Anne. Anne, est particulièrement active dans toute cette séance et source de nombreuses propositions. Elle appartient au seul groupe dont les échanges ont été enregistrés

avec la suite 5-8-1-2-6. La maîtresse ne relève pas ce point (elle ne l'a peut-être pas entendu). Elle donne la suite 5-2-4-0-3 et demande aux élèves d'essayer les méthodes, puis fait une mise en commun en commençant par la méthode M1 (*Aline 1*). Il s'agit d'introduire la notion de contre-exemple :

> « Or on vient de trouver un exemple qui dit que le théorème d'Aline, ça ne va pas : c'est un contre-exemple. Est-ce que vous comprenez ce que ça veut dire ? C'est un exemple qui dit « ça démolit ça ! ». » (Annexes, p. 33).

Au tour de parole suivant, la maîtresse reprend « Ah ça, ça démolit le théorème d'Aline », et le redit à nouveau trois minutes plus tard[14], avant de demander aux élèves « Est-ce qu'on peut trouver un contre-exemple pour démolir la méthode d'Anne ? ». Pendant ce temps, Elsa est en train de commenter l'exemple 5-8-1-2-6 donné par Anne. La maîtresse propose alors la suite 8-1-3-0-0, l'objectif étant de fournir un contre-exemple à la méthode d'Anne (M3). Il semble donc que l'on reprenne la même stratégie : une méthode erronée que l'on « attaque » avec un contre-exemple ; cependant, les deux épisodes sont différents. La méthode M1 convient pour les exemples traités à la séance 1[15] ; en outre, elle est valide pour tous les quintuplets d'entiers supérieurs ou égaux à 2 ; le contre-exemple pourrait donc permettre de travailler sur le domaine de validité de l'énoncé. Cependant le résultat n'est pas stabilisé, puisque, bien au contraire, il est « démoli » ; notons que ceci est conforme au modèle de Lorenzen. Ce n'est pas le cas de la méthode d'Anne qui ne convient pas pour la plupart des suites contenant un ou plusieurs 1, et en particulier pour l'exemple testé dans le groupe. Ce qui est en cause, c'est ici la pertinence de la méthode et non pas son domaine de validité (qui est très restreint). Ceci va apparaître à travers la nouvelle suite qui va permettre à une élève de proposer un contre-exemple montrant que la méthode d'Anne n'est pas valide, et de faire émerger des modifications à la méthode M3 prenant en compte ce contre-exemple :

M4 (*Aline 3*) : *On multiplie les nombres entre eux, sauf avec le 0 qu'on ajoute et quand il y a un 1 on l'ajoute au nombre juste avant le plus grand.*

Une discussion s'engage ; Anne propose la suite 5-8-1-2-6[16] comme contre-exemple à la méthode M4, et propose en même temps la méthode M5 qui correspond en gros à celle que nous avons noté Mb.

---

[14] Un peu plus loin, croyant qu'Anne revient sur cette méthode, elle dira : « On l'a jetée. On a dit c'est pas bon ».

[15] 3-8-7-5-4 et 7-3-2-5-8.

[16] Il est intéressant de noter que cet exemple lui sert à plusieurs reprises, et qu'il sert aussi de support à la réflexion d'Elsa.

M5 (*Anne 2*) : *On multiplie tous les nombres sauf quand il y a un ou plusieurs 1 on l'additionne (ou on les additionne) avec le plus petit nombre, sauf avec des 0, et on multiplie tous les nombres, et quand il y a un ou plusieurs 0, on l'additionne (ou on les additionne) avec n'importe quel nombre.*

Ce dernier énoncé arrive à la 50ème minute de la séance n°2 ; la maîtresse propose alors de jouer en donnant la suite 7-0-4-3-1, qui est un exemple pour la méthode M5 et un contre-exemple pour la méthode M4. Un débat s'engage entre Anne et Elsa sur la question de savoir si la méthode M5 marche quand il y a à la fois des 1 et des 0. L'observateur intervient pour déclarer « Un contre-exemple, c'est ça ! C'est un seul exemple, ça suffit pour montrer que c'est faux ». Finalement, les élèves traitent l'exemple proposé par la maîtresse et presque tous trouvent le résultat correct en appliquant la méthode M5. Un élève dit « Alors on voit que ça marche » ; tandis qu'un autre élève dit: « ce n'est pas parce que celle-là marche qu'on pourra pas en trouver une qui….. », ce qui montre que pour certains élèves le statut de l'exemple est interrogé. La maîtresse dit alors :

> « Jérémy, moi j'ai dans ma tête un contre-exemple qui démolit la méthode, le théorème d'Anne » (p. 43).

Cette insistance à chercher encore des contre-exemples pour « démolir » la méthode d'Anne, qui constitue pourtant un réel progrès par rapport aux propositions précédentes, signe ce que nous avons convenu d'appeler « la centration excessive sur le contre-exemple[17] ». En effet, ce qui ressort de l'analyse des échanges que nous venons de faire, c'est que le travail sur le contre-exemple, qui est de fait au cœur de la séquence proposée, oblitère d'autres pistes qui auraient pu être exploitées et qui sont riches tant du point de vue des connaissances mathématiques mobilisées que du point de vue des raisonnements mis en œuvre. En effet, les arguments qui permettent de valider ou d'invalider les méthodes au-delà du contre-exemple mobilisent à la fois des connaissances mathématiques du cycle 3 et des modes de raisonnement élaborés, comme on le voit avec Elsa, qui réfléchit à partir de la suite 5-8-1-2-6 proposée par Anne:

> Elsa : « 8 plus 1 ça fait 9, mais si je fais après 9 fois 5, le 1, il y est plusieurs fois ; il y est 5 fois dedans, que si je l'additionne à la fin, il y est qu'une fois ».

[17] Nous avons analysé ailleurs (Durand-Guerrier, à paraître en 2005 aux PUL) un exemple relevant de « cette centration sur le contre-exemple », dans les travaux de l'IREM de Lyon sur l'initiation au raisonnement déductif (Arsac & al., 1992).

Bien qu'il s'appuie sur la méthode M3 qui n'est pas valide, ce raisonnement complexe est correct et permet de disqualifier la méthode M2 ; c'est une première étape qui pourrait ouvrir la voie pour le raisonnement complet[18]. Il n'est cependant pas repris par la maîtresse.

De ce fait, les potentialités de la situation sont selon nous sous-exploitées. Les élèves ont effectivement travaillé sur l'utilisation du contre-exemple pour invalider une méthode générale et sur le fait qu'un énoncé général ayant des exemples peut être mis en défaut ; ils ont également exploité le fait que la survenue d'un contre-exemple invite à revenir sur les méthodes pour les amender. Cependant, il n'apparaît pas, selon nous, et contrairement à ce qu'écrit Patrick Gibel, qu'ils aient *apporté la preuve de la validité* d'une nouvelle méthode (p.132). Ceci tient au fait que, s'il est vrai, comme il est dit par l'observateur, que certains élèves ont *établi* des théorèmes (Annexe, p.44)[19], ces théorèmes n'ont pas donné lieu à une reprise collective et n'ont pas été étudiés pour eux-mêmes. Ce n'était manifestement pas l'objet de la leçon, qui visait, semble-t-il, à établir le résultat le plus général, qui vaut pour tous les quintuplets d'entiers.

La question du rôle joué par la référence à la logique dialogique de Lorenzen dans l'organisation et le déroulement de cette situation est bien sûr une question ouverte, à laquelle nous ne sommes pas en mesure d'apporter une réponse. Il n'est évidemment pas question de dire que le fait d'adopter le modèle de Lorenzen pour penser les situations de preuve et de validation ferait basculer du côté de l'intuitionnisme, qui considère que les vérités mathématiques n'ont pas d'existence indépendante de l'activité mathématique elle-même et qu'elles sont en devenir[20]. Il suffit de considérer que les énoncés en attente de preuve sont des *conjectures*. On peut rappeler ici que de nombreux travaux conduit en didactique des mathématiques relient la pratique du débat en classe avec l'élaboration des règles de raisonnement[21], et souligner les parallèles avec le point de vue développé dans Lakatos (1976, 1984), qui a inspiré les travaux des didacticiens sur la preuve au début des années quatre-vingt, en particulier ceux de Nicolas Balacheff (1987). Cet auteur, dans un article plus récent intitulé « Apprendre la preuve » (Balacheff, 1999) rappelle à propos du traitement des contre-exemples, en référence à Lakatos (1976), « la multiplicité, en général oubliée, des conséquences possibles d'un contre-exemple : de l'amendement de la conjecture à la reprise d'une définition, en passant par le rejet possible du contre-exemple lui-même. ». (p. 211). Il

---

[18] Comme Guy Brousseau nous l'a fait remarquer, Elsa établit ici un théorème que l'on peut écrire sous la forme $(X+1)\times 5 > (X\times 5) + 1$.

[19] Un exemple de tels théorèmes est celui formulé par Elsa (voir note 17

[20] Pour un développement de ces questions, voir Bouveresse, 1988.

[21] C'est le cas en particulier de Arsac & al.(1992), Legrand (1993), ERMEL (1999)

manque selon nous à cette liste *le retour sur le domaine de validité* de la conjecture, ce qui n'est pas sans lien avec la question des définitions, et/ou la caractérisation des contre-exemples lorsque celle-ci est possible. Ces derniers points renvoient directement à la notion de structure interprétative telle que définie par Tarski (1960). Poser la question du domaine de validité revient à suspendre un temps le jeu des contre-exemples pour s'intéresser à une preuve éventuelle de la conjecture, dans une interprétation stabilisée, en référence à un ensemble de connaissances partagées. Cette interprétation peut alors fonctionner comme une « mini-théorie déductive ». On pourrait ainsi a) prouver M1 dans l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 2, en s'appuyant sur les propriétés des opérations et de la relation d'ordre dans l'ensemble des entiers naturels ; b) essayer de prouver M5 et découvrir ce faisant que cette méthode ne vaut pas dans certains cas, et retravailler sur le domaine de validité et/ou la caractérisation des contre-exemples.

Dans l'introduction de son ouvrage *Preuve et réfutation* (Lakatos, 1976, 1984), l'auteur s'oppose de manière vigoureuse à la métamathématique au sens de Tarski et déclare rejeter le *formalisme*, pour lui opposer *une logique de la découverte scientifique*, une métamathématique comme *paradigme des méthodes non formelles, quasi empiriques*. La virulence de Lakatos à l'égard de Tarski nous étonne car, si l'on en croit Sinaceur (1998) :

> « L'originalité de Tarski c'est d'avoir fait la théorie logique de cette articulation [entre syntaxe logique et sémantique mathématique] et détruit, *au niveau de la pratique,* la barrière entre logique et mathématiques ordinaires. » (op. cite, p.143)

Nous avons éprouvé dans notre propre travail la fécondité de l'approche de Tarski et ce même pour des mathématiques très élémentaires, comme nous allons le montrer avec notre deuxième exemple.

IV.2 Un exemple de « travail de la théorie » en géométrie des solides

L'exemple que nous présentons ici a fait l'objet de plusieurs présentations, en particulier Dias & Durand-Guerrier (2005), et fait l'objet d'une communication dans un symposium de ce colloque. Il s'agit d'une situation proposée régulièrement à des professeurs d'école en formation initiale ou continue. On demande aux participants de déterminer tous les polyèdres réguliers, c'est-à-dire les polyèdres convexes, dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables, et ayant le même nombre de faces à chaque sommet. Ces polyèdres réguliers sont au nombre de cinq ; ils sont connus sous le nom de *Solides de Platon* : le tétraèdre (3 faces triangulaires à chaque sommet), l'octaèdre (4 faces triangulaires à chaque sommet), l'icosaèdre (5 faces triangulaires à chaque sommet), le cube (3 faces carrées à chaque sommet), le dodécaèdre (3 faces pentagonales à chaque sommet). Il n'y a pas de polyèdre régulier à faces hexagonales ; en effet, lorsque l'on assemble trois hexagones réguliers, on obtient un angle plein (de 360°), et il n'est donc pas possible d'obtenir un angle dièdre.

Le travail se fait en petit groupe, suivant le dispositif du Problème Ouvert (Arsac & al., 1991) et nous mettons à la disposition des participants : ciseaux, papier cartonné, compas, règles, équerre, formes plastiques articulables comprenant des polygones réguliers ou non ayant 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 côtés. La situation est prévue pour provoquer la rencontre avec le fait qu'on ne peut pas construire un polyèdre régulier à faces hexagonales. Le protocole dont nous analysons un bref extrait a été recueilli (et transcrit) par Thierry Dias[22] dans le cadre d'un stage de formation continue auprès de professeurs de l'Adaptation et L'Intégration Scolaire (AIS). Nous travaillons sur la transcription des échanges à l'intérieur d'un groupe de quatre stagiaires, à un moment où ils mettent en relation ce qu'ils sont en train d'expérimenter avec le matériel fourni et leurs connaissances mathématiques concernant la possibilité ou non de réaliser un polyèdre régulier à faces hexagonales. Le groupe est composé de Simon, jeune enseignant de SEGPA[23] sorti de l'IUFM de Lyon deux années auparavant ; Julie, jeune enseignante en Institut Médico-Educatif ; Charles, enseignant expérimenté de SEGPA (principalement chargé des mathématiques) et Georges, conseiller pédagogique en circonscription AIS.

Au début du travail, Julie exprime l'idée qu'il y a une infinité de tels polyèdres, « puisque je peux avoir un triangle, un carré, un pentagone, un hexagone, … », tandis que Georges émet des doutes sur la possibilité de le faire et déclare qu' « il y a une loi obligatoirement quelque part ». Pendant ce temps, Simon essaye de faire la construction avec des pentagones tandis que Charles, qui est convaincu de la possibilité de le faire, essaye avec des hexagones. Apparaît alors l'idée du ballon, puis la recherche d'une progression entre nombre de faces du polyèdre et nombre de côtés du polygone. Simon est maintenant également convaincu que c'est possible avec des hexagones. Comme le matériel est souple, ils essayent de donner du volume ; la notion d'angle commence à apparaître :

1. *Georges* : « tu imagines qu'en s'ouvrant un petit peu plus à chaque fois… »

---

[22] La transcription se trouve en annexe de Dias (2004)

[23] Section d'enseignement général et professionnel spécialisé. Ces sections sont localisées dans les collèges.

2. *Simon* : « Ouais, ouais, l'angle, un petit angle en plus et tu peux faire

3. *Charles* : « Bien sûr

4. *Simon* : « .. . des milliers des.. t'as les diamants qui ont je sais pas combien de facettes (*Il montre avec les mains les contours d'une sorte de sphère*)

5. *Charles* : « Oui »

6. *Simon* : « c'est des trucs à faces régulières qui en ont des centaines des fois ».

Cette référence pragmatique soutient leur recherche en renforçant la conjecture que ceci est possible, et ce d'autant plus que personne ne la met en doute. Ils continuent à construire en rajoutant toujours plus d'hexagones, tout en continuant à chercher la progression. C'est alors que Georges donne à son tour un argument de type pragmatique :

7. *Georges* : « Non, mais moi, je crois que ça ne marche pas ; ça correspond tu sais au pavage au sol quand on pose des carreaux ça reste plat, jamais tu peux en faire un truc. (…) des carreaux que tu mets au sol dans ta maison.

Cet argument ne convainc pas Charles et Simon qui « voient un volume » (conséquence de la flexibilité du matériel). Même si Simon est ébranlé un moment, il résiste, tandis que la construction de Charles « casse ». Georges concède la possibilité de créer un volume, mais en *jouant sur les espaces*. Simon et Charles pensent qu'on peut s'approcher de la sphère. Georges revient sur le ballon de football pour lesquels les faces ne sont pas toutes pareilles[24]. On assiste ensuite à une évolution rapide de la position de Simon :

8. *Simon* : « ouais mais moi, pour moi, si est-ce que, … ouais mais là, est-ce qu'il est possible que ça forme un ça forme un angle… »

9. *Georges* : « regarde, tu retombes de nouveau sur une figure qui est pratiquement identique, sur un grand… machin, tu vois… sur un grand euh hexagone… donc on va retomber sur le même problème, de nouveaux quand tu en auras fait plein comme ça. »

10. *Charles* : « mais là aussi ; là aussi je retombe sur … ah oui, mais je ne suis pas en ligne droite »

11. *Simon* : « ce qui compte c'est que quand on a cinq côtés ça peut faire un angle qui…je sais pas combien ça fait… »

12. *Georges* : « Oui »

13. *Simon* : « 100…100….115 degré »

14. *Georges* : « hum.. »

15. *Simon* : « alors que dès que tu en as six, tu peux plus faire d'angles ».

[24] En effet, le ballon de football est construit en général avec des pentagones et des hexagones réguliers.

16. *Georges* : « Voilà »

À partir de ce moment-là, l'activité (commencée depuis un quart d'heure environ) s'oriente vers la recherche de conditions, et la construction d'autres solides dans un aller et retour entre les solides construits et l'environnement papier crayon, avec un travail sur les angles, ce qui les conduit à abandonner les polygones réguliers à plus de six côtés. Ils se posent également la question de savoir s'il n'y a que trois tels polyèdres (tétraèdre, cube, pentagone), car ils n'ont pas envisagé la possibilité d'avoir plus de trois faces à un sommet. Il y a durant cette partie une intense activité de construction de solides qui sont mis en perspective avec la définition, mais ils ne trouvent pas les deux polyèdres réguliers manquants, en particulier parce qu'ils travaillent longtemps avec des polygones non réguliers. On peut observer dans leur travail l'insuffisance de la disponibilité des connaissances mathématiques qui auraient permis d'aboutir rapidement à la solution à partir des échanges 8 à 16.

Pour modéliser l'activité des sujets au cours de cet échange, on peut considérer l'évolution de « la théorie locale du groupe[25] », notée **T**, au cours de la première partie de l'échange.

Au début, **T** contient la définition des polyèdres réguliers et les deux axiomes

A_1 : Il y a exactement un polyèdre régulier par polygone régulier

A_2 : Il y a une infinité de polygones réguliers convexes

A_2 est un résultat de la géométrie plane ; cette situation ne peut pas le mettre en doute.

A_1 est un postulat qui va sous-tendre une bonne partie de l'activité, et en particulier la tentative de construire un polyèdre régulier à faces hexagonales puisque l'énoncé

E_1 : il est possible de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales,

découle logiquement de **T**, ainsi que l'énoncé

E_2: il y a une infinité de polyèdres réguliers.

Au cours des échanges, la théorie **T** s'enrichit d'un énoncé existentiel :

E_3 : il existe des polyèdres réguliers ayant un très grand nombre de faces.

Cet énoncé s'appuie sur une référence externe au problème, qui ne peut pas être contrôlé par les sujets et qui n'est pas mis en doute dans le groupe ; Il vient renforcer la théorie **T**, dont il découle, celle-ci pouvant être menacée par la difficulté à réaliser le solide dont E_1 asserte l'existence.

Georges introduit alors un énoncé qui s'oppose à l'énoncé E_1 :

---

[25] Qui comporte les définitions, les énoncés théoriques assumés (axiomes), et certaines propositions considérées comme vraies, découlant ou non des axiomes. Bien sûr, le choix de considérer qu'une proposition jour le rôle d'un axiome est dans ce cas une reconstruction du chercheur.

E_4 : « On ne peut pas réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales »,
que l'on peut reformuler en un énoncé universel négatif

« *Aucun polyèdre régulier n'a des faces hexagonales* »

Ceci s'appuie sur un axiome A_3 :

A_3 « On peut paver le plan avec des hexagones »

Cette proposition est un énoncé vrai de la géométrie plane, un des objectifs de la situation est de le mettre en lien avec le problème posé.

Georges exprime que pour lui E_4 découle de A_3. La « théorie » du groupe comporte alors les axiomes A_1, A_2 et A_3 ; les deux énoncés contradictoires E_1 et E_4 sont en concurrence. En vertu du principe de contradiction, il faut rejeter l'un des énoncés. Dans une telle situation, on peut soit a) travailler à établir l'énoncé existentiel E_1 ; b) prouver que l'énoncé universel E_4 découle des axiomes ; c) retravailler la théorie (axiomes et/ou définitions) ; d) mettre en cause le dispositif expérimental.

Georges commence par mettre en cause le dispositif expérimental (« prendre des trucs rigides »), puis propose un aménagement de la définition pour le solide que Charles et Simon cherchent à construire (« en jouant sur les petits espaces ») tandis que Simon et Charles sont sur la position a), jusqu'à l'échange que nous avons noté 8 dans lequel Simon introduit implicitement un axiome supplémentaire :

A_4 : pour réaliser un polyèdre, il faut pouvoir faire un angle[26]

Georges et Simon tombent d'accord sur le fait que ceci permet d'éliminer E_1. Ils s'engagent alors activement dans la résolution du problème avec la nouvelle théorie qui comporte les axiomes A_2, A_3 et A_4. En effet, le rejet de E_1 détruit l'axiome A_1, en fournissant un contre-exemple (l'hexagone) à l'énoncé général. Il faut noter toutefois que ceci n'est pas explicité dans le groupe et que l'énoncé E_2 (il existe une infinité de polyèdres réguliers) n'est pas remis en cause à ce moment là dans le groupe ; cet énoncé ne découle plus à ce moment là des axiomes assumés; nous savons qu'il est faux, mais leur recherche va cependant les conduire à le tenir pour vrai en considérant les polyèdres convexes obtenus avec les losanges[27].

Ce que nous avons voulu illustrer par ce bref aperçu, c'est l'intérêt, pour les analyses didactiques, de considérer un point de vue *modèle-théorique* qui articule travail dans la théorie et travail dans une, ou des, interprétations. On voit ici clairement les allers et retours entre les énoncés théoriques et les actions sur les objets de la situation d'une part, les appels à

[26] sous-entendu : un angle dièdre,

[27] Ce ne sont pas des polyèdres réguliers car le losange n'est pas un polygone régulier (il n'est pas équiangle).

des références externes d'autre part, qui contribuent à l'avancement dans la résolution du problème, qui comporte une nécessaire mise en relation entre les possibilités de réalisation effective des solides et la relation pertinente sur les angles.

Bien sûr, ce point de vue n'est pas exclusif d'autres point de vue, et l'on voit bien apparaître dans les interactions l'importance de la dimension dialogique. Ceci plaiderait pour la complémentarité des deux approches dialogique et *modèle-théorique* dans les situations d'apprentissage de la preuve et/ou du raisonnement. Ceci serait d'ailleurs en accord avec la position de Lorenzen qui pense que les points de vue *axiomatiques* et *constructivistes* peuvent cohabiter en mathématiques, bien qu'il reproche avec virulence leur dogmatisme aux axiomaticiens (Lorenzen, 1967, p.10)

V. Un point de vue associant les deux approches

Au moment de mettre un terme au texte de notre communication, nous nous sommes demandé s'il existait dans la littérature logique et philosophique des points de vue critiques mettant en perspective les deux systèmes. Nous avons alors découvert un texte de Denis Vernant publié en 2004 dans le numéro 26 des *Cahiers de Linguistique Française*, intitulé « Pour une logique dialogique de la véridicité ». Dans ce texte, l'auteur se propose de préciser l'aspect dialogique de la recherche de la vérité. Pour les besoins théoriques, il distingue la véracité (*le fait de dire ce que l'on croit vrai*) et la véridicité (*qui résulte d'un accord entre les interlocuteurs au terme d'une interaction*) :

> « Seule la véridicité met en jeu directement la vérité dans sa dimension dialogique en ce qu'elle résulte d'un accord obtenu au terme d'une interaction entre les interlocuteurs : ceux–ci s'entendent pour admettre comme vraie une proposition.» (Vernant, 2004, p.88).

Il présente rapidement le système de Lorenzen et répond à la première des questions que nous avons posées à la fin du paragraphe II.2. En effet, un des aspects important de la logique dialogique de Lorenzen tient au fait qu'il suffit de modifier une des règles structurelles qui régissent le dialogue pour retrouver la logique standard. Il s'agit d'une règle qui stipule que « Si plusieurs attaques sont possibles, on doit répondre à la dernière attaque (*devoir de défense)* ». C'est avec cette règle que l'on obtient l'ensemble des vérités logiques de la *logique intuitionniste*. Si on la modifie de sorte que le proposant a la possibilité de choisir de répondre à l'attaque de son choix, on aboutit alors à l'ensemble des vérités *de la logique standard.* (ibid., p.91). Tout en soulignant l'intérêt de cette logique dialogique qui propose

« un jeu de langage qui relève de la discussion rationnelle », il note que celle-ci « ne saurait traiter que de la vérité logique, c'est-à-dire de la validité » (ibid., p.94), ce qui est insuffisant pour traiter de la véridicité. Pour dépasser cette limitation, il faut sortir de la logique formelle, comme le propose Hintikka (1994), qui « distingue soigneusement « jeux d'extérieur » de découverte effective, et « jeux d'intérieur », jeux de preuve inférentielle ; (ibid., n16) et « introduit la question de la vérité matérielle en faisant appel à la construction de modèles dans lesquels les propositions atomiques acquièrent une valeur de vérité[28]. » (ibid., p.99). Pour l'auteur, l'erreur d'Hintikka est de réduire la procédure de vérification externe à un simple dialogue (*entre Moi et la Nature*). Pour combiner les aspects positifs de ces deux systèmes, Denis Vernant considère la nature « non comme opposant, mais comme *tiers* sanctionnant la véridicité des propositions atomiques avancées par les deux interlocuteurs » (p.100). Ceci revient à modifier la règle structurelle qui stipule que le proposant ne peut asserter une proposition atomique que si elle a déjà été introduite par l'opposant, en la remplaçant par une règle qui stipule que : « Les propositions atomiques assertées par chaque interlocuteur sont vérifiées par une procédure transactionnelle acceptée conjointement par les deux interlocuteurs » (ibid., p. 100). L'auteur précise que ceci « ne peut se jouer que si l'interaction trouve sens et finalité dans une transaction effective où il s'agit de résoudre un problème dans une situation déterminée qui possède ses propres procédures de vérification et d'action » (ibid., p. 101). Cette validation externe pouvant être de différent type (consultation d'un expert, appel à un texte de référence, à un protocole expérimental,…). Nous sommes ici très près du type de questions auxquelles le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques tente de répondre. La possibilité d'utiliser ce modèle pour analyser un cas réel est présenté sur l'exemple d'un dialogue entre médecin et patient.

VI. Conclusion

Nous avons saisi l'opportunité offerte par les organisateurs de ce colloque de réfléchir à la question des références épistémologiques pour les didactiques pour interroger et mettre en perspective le modèle de Lorenzen, qui sous-tend les débuts de la théorie de situations didactiques avec la théorie des modèles de Tarski dans leurs usages pour élaborer et analyser les situations d'apprentissage de la preuve. Nous pensons avoir montré, que le modèle de Lorenzen, malgré l'intérêt incontestable de l'aspect dialogique qu'il a développé, ne suffit pas pour comprendre et analyser l'activité mathématique. Nous faisons même l'hypothèse qu'il

[28] On reconnaît ici la théorie élémentaire des modèles de Tarski.

contribue à en donner une image déformée, en exacerbant le travail sur les énoncés au détriment du travail sur les objets, leurs propriétés et les relations mutuelles qu'ils entretiennent. Ceci conduit en particulier à évacuer les énoncés contingents de la classe de mathématiques (Durand-Guerrier, 1999), et, contrairement aux intentions de Lorenzen, renforce l'aspect dogmatique des mathématiques, *dans lesquels on devrait être capable de trancher entre le vrai et le faux en toutes circonstances,* les éloignant irrémédiablement de « la logique de sens commun », qui s'accomode parfois des exeptions et du fait de ne pas toujours savoir avec certitude ce qu'il en est de la vérité. Tout en disant cela, nous ne contestons évidemment pas le fait que la question de la vérité est au cœur de l'activité mathématique. Nous disons que l'appareillage logique dont nous avons besoin pour traiter de la question de l'apprentissage de la preuve et du raisonnement dans la perspective, en particulier, de la théorie des situations didactiques, se doit de mieux rendre compte de l'activité effective du mathématicien, et nous pensons avoir donné des indices de la fécondité, pour cela, des concepts et des méthodes de la théorie des modèles de Tarski. Nous ne disons évidemment pas non plus que le modèle de Lorenzen a « bridée » la théorie des situations didactiques. Bien au contraire, c'est parce que nous pensons que la théorie des modèles de Tarski rend mieux compte des potentialités offertes par la Théorie des Situations pour l'apprentissage du raisonnement que nous avons écrit ce texte.

La possibilité de développer des modèles conjuguant les deux approches est illustré par le système proposé par Denis Vernant. Ceci nous rappelle que la Preuve est un objet d'étude dans de nombreux domaines : Logique ; Philosophie de la logique et du langage ; Linguistique ; Intelligence Artificielle ; ou même Sociologie, d'où la nécessité d'un dialogue continu avec les chercheurs travaillant dans ces domaines. Nous disons bien *dialogue*, et dans ce dialogue, les apports des travaux de recherche en didactique des mathématiques ne sont pas négligeables[29]. En effet, par l'organisation de la confrontation à la contingence, ils mettent en particulier en évidence des phénomènes que les modèles théoriques a priori comme celui de Lorenzen ne permettent pas toujours de prévoir.

[2929] Voir par exemple Arsac (1987) et Dorier (2000)

Références

ARSAC, G. (1987) L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 8/3. 267-312.

ARSAC, G. , Germain, G., Mante, M. (1991) Problème ouvert et situation problème, IREM de Lyon.

ARSAC, G. & al., (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon; I.R.E.M. de Lyon.

BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuves et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, 18/2, 147-176.

BALACHEFF, N. (1999), Apprendre la preuve, in J. Sallantin & J.J. Szczecianiarz (dir.), *Le Concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, PUF, pp.197-236.

BROUSSEAU, G. (1986), Méthodes et fondements de la Didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7/2, 33-115.

BROUSSEAU, G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*, La Pensée Sauvage.

BOUVERESSE, J., (1988), *Le pays des possibles, Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel*, Minuit.

CHEVALLARD, Y. (2004) Pour une nouvelle épistémologie scolaire. *Les cahiers Pédagogiques*, n°427, 34-36.

DIAS, T. (2004) *Le recours à l'expérience dans la construction des connaissances mathématiques*. Mémoire de DEA de l'Université Lyon 1.

DIAS, T. & DURAND-GUERRIER,V. Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM*, 60, pp. 61-78.

DORIER, J.L. (2000) *Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspective théorique sur leurs interactions*. Les cahiers du laboratoire Leibniz n°12, http://www.leibniz-imag.fr/LesCahiers.

DURAND-GUERRIER, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de l'université Lyon1.

DURAND-GUERRIER, V. : (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe, in *Petit X* 50, 57-79. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier Grenoble1.

DURAND-GUERRIER, V. (2004) La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique pour analyser les énoncés et les raisonnements mathématiques, in Durand-

Guerrier,V. & Tisseron, C. (eds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2003*, IREM de Paris 7.

DURAND-GUERRIER, V. (2005), *Recherches sur l'Articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, IREM de Lyon.

DURAND-GUERRIER, V., Théorie des modèles et certitude. Le cas d'une récréation mathématique. A paraître en 2005 in *Les actes du colloque ARDéCO, les processus de conceptualisation en débat, Janvier 2004*.

DURAND-GUERRIER, V., La résolution des contradictions. Apports de la sémantique logique, à paraître aux PUL en 2005 in Durand-Guerrier & al. (eds.) *Jeux et enjeux des langages dans l'élaboration des savoirs en classe*.

ERMEL (1999) *Vrai, faux, on en débat*. INRP.

GENTZEN, G. (1934) Untersuchungen ûber das logische Schliessen, *Math. Zeitschr.*, 39, pp.176-210 ; traduction française in J. Lardrière, *Recherches sur la déduction logique*, PUF, 1955.

GIBEL, P. (2004), *Fonctions et statuts des différents modes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire*, Thèse de l'université Bordeaux 2.

LAKATOS I. (1974) *Proofs and refutations*, Cambridge University Press ; traduction française de Nicolas Balacheff et Jean-Marie Laborde, *Preuves et réfutations,* Paris, Hermann 1984, 2004.

LEGRAND, M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, in *Repères IREM*, 10, pp. 123-158.

LOCIA ESPINOZA, E. (2000) *Les contre-exemples dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse de l'université Toulouse III.

LORENZEN, P. (1967) *Métamathématique,* Gauthier Villars

MARGOLINAS, C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée Sauvage.

QUINE, V.V.W. (1990), *Pursuit of truth,* Harvard University Press , traduction française, Le Seuil, 1993.

SINACEUR, H. (1991a) *Corps et Modèles*. Vrin

SINACEUR, H. (1991b) Logique : Mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? in *Hommage à Jean-Toussaint Dessanti*, T.E.R.

SINACEUR, H. (1998), Différents aspects du formalisme, in F. Nef & D. Vernant (ed.) *Le formalisme en question, le tournant des années 30*, Vrin, pp. 129-146.

TARSKI, A. (1960) *Introduction à la logique,* Gauthier-Villars.

VERGNAUD, G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 10/2.3 pp.133-169.

VERNANT, D. 2004, Pour une logique dialogique de la véridicité, *Cahiers de Linguistique française,* 26, p. 87-111

WITTGENSTEIN, L.(1921) *Tractatus logico-philosophicus*. Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction. française., Gallimard, 1961.