Modélisations logiques en situation de validation

Séance de TD 1 relative au cours de Viviane Durand-Guerrier :
"Quelques apports de lanalyse logique du langage pour les
recherches en didactique des mathématiques"

Il s'agit d'un long TD réparti sur les 3 séances et divisé en un certain nombre d'objectifs différents.

Les objectifs traités lors de cette première séance sont les objectifs 1 et 2, dont les situations se déroulent dans le contexte de l'analyse réelle au début de l'université.

1 Objectif 1 : Insuffisance du calcul des propositions

On étudie une preuve erronée du théorème des accroissements finis généralisé.

La preuve est une erreur classique d'un certain nombre d'étudiants : on applique le théorème des accroissements finis usuel aux deux fonctions f et g avec le même réel c, et on fait le quotient des égalités. Le caractère muet de c est mal compris, et cela est dû en partie à une approche implicite des quantificateurs. La confusion est faite entre les deux assertions suivantes :

$$\exists c,\ f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)\ et\ g'(c)(b-a) = g(b) - g(a)$$

$$\exists c,\ f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)\ et\ \exists c,\ g'(c)(b-a) = g(b) - g(a)$$

Le fait que deux variables muettes distinctes sont requises est considéré comme une habitude mais n'est jamais dit explicitement à l'introduction du théorème en classe.

2 Objectif 2 : Les limites d'une approche implicite

2.1 Preuve de Houzel

Lors d'une preuve du théorème d'addition des limites (si $f \to h$ et $g \to k$ quand $x \to l$ alors $f + g \to h + k$ quand $x \to l$), Houzel utilise l'argument suivant :

$$\forall \epsilon \exists \eta \ |x - l| < \eta \Rightarrow |(f + g)(x) - (h + k)| < \epsilon$$

L'utilisation de deux quantificateurs différents pour f et g est ici implicite. Cependant, comment les étudiants peuvent-ils se convaincre que dans ce cas c'est acceptable, alors que dans le cas de l'objectif 1, cette démarche n'est pas acceptable ? Qu'est-il nécessaire d'expliciter pour l'apprentissage ?

2.2 Preuve de Liouville

On étudie cette fois une preuve erronée et les réflexions d'élèves concernant le théorème suivant :

Théorème : Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur R. Si la dérivée de f est constamment nulle alors f est constant.

L'erreur provient de l'utilisation d'un ϵ sans expliciter sa dépendance à l'une des variables du problème.

L'étude des dialogues d'élèves de divers niveaux de l'enseignement supérieur montre que tous ont de grandes difficultés à déterminer la validité de la preuve. Cette fois-ci, le problème vient d'une dépendance implicite qui est difficile à identifier même à un bon niveau. Il semble ici nécessaire d'avoir des moyens pour déterminer la validité d'une telle preuve, faisant un appel complexe à des quantificateurs. C'est dans ce cadre de validation qui Vivianne et Thomas se sont intéréssés au système de déduction naturelle de Copi.

2.3 Système de déduction naturelle de Copi

Ils sont faits pour établir des preuves logiques (montrer qu'un syllogisme est valide...). Ils ont été motivés par la volonté de rester au plus près du mode de raisonnement naturel des mathématiciens.

Valérie a pensé que c'était un bon outil pour analyser les preuves.

On a l'habitude d'éliminer l'implication quand on fait une déduction lors d'une preuve. Mais observer l'introduction ou l'élimination des différents quantificateurs fournit des outils de contrôle lors de l'analyse d'une preuve, en ce sens qu'elle formalise les idées de dépendance.

Dans le système de Copi, par exemple, il est impossible d'utiliser une lettre deux fois pour deux variables muettes différentes.

Le système permet notamment de vérifier que la première preuve, juste d'un point de vue mathématique, comporte bien un problème logique.