Modélisations logiques en situation de validation

TD associé au cours de Viviane Durand-Guerrier

Th. Barrier, LML, Université d'Artois

V. Durand-Guerrier, I3M, Université Montpellier 2

« Plan » du TD

Objectif 1 : insuffisance du calcul des propositions
Modalité : « étude » d'une preuve

Objectif 2 : les limites d'une approche implicite
Modalité : étude de deux preuves et d'extraits de dialogues d'étudiants.

Objectif 3 : Présentation d'un outil de modélisation : la déduction naturelle
Modalité : étude d'une preuve

Objectif 4 : Présentation d'un deuxième outil de modélisation
Modalité : modélisation d'un dialogue de validation

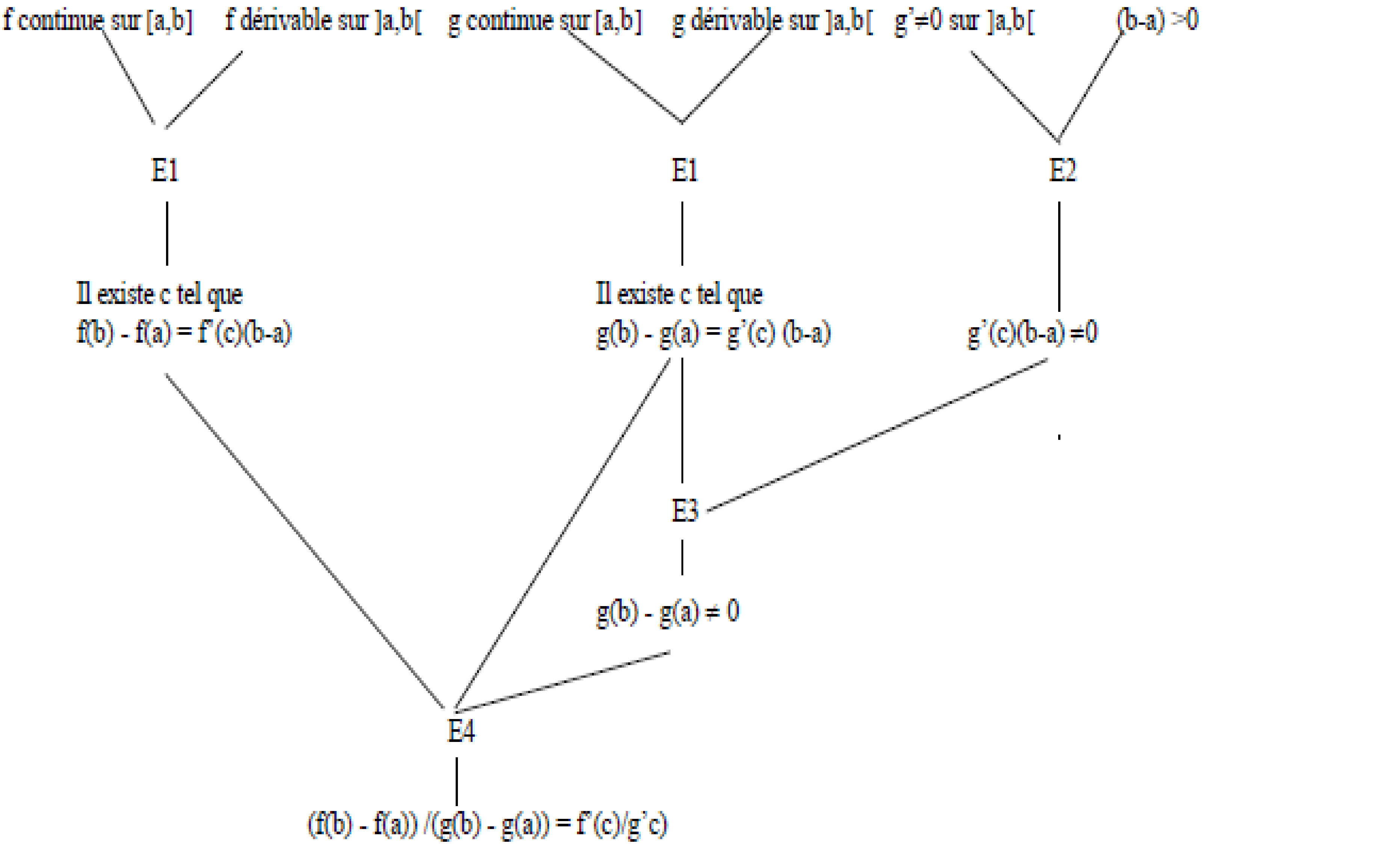
Objectif 5 : Essai de décodage du contrat concernant les quantificateurs
Modalité : analyse d'extraits de dialogues

« Objectif » 6 : Mettre en œuvre la notion formelle de stratégie
Modalité : étude d'un texte historique (Seidel)

Objectif 1

Preuve :
La fonction vérifie les conditions d’application du théorème des accroissements finis, donc il existe *c* dans]*a* ; *b*[, tel que *f’*(*c*)(*b*-*a*)=*f*(*b*)-*f*(*a*). De même *g* vérifie les conditions d’application du théorème des accroissements finis, donc il existe *c* dans]*a* ; *b*[, tel que *g’*(*c*)(*b*-*a*)=*g*(*b*)-*g*(*a*). Comme *g’* ne s’annule pas sur]*a* ; *b*[, et donc . On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l’égalité cherchée.

Tâche : se convaincre que
(1) l’erreur dans la preuve ci-dessus ne relève pas d’une mauvaise application du Modus Ponens.
(2) elle ne relève pas non plus d’une prise en compte indue du “contenu” des propositions ou de la signification des lettres *a*, *b*, *c*, *f* ou *g* mais bien de leur statut logique.



E1 Théorème des accroissements finis *E2 produit de deux réels non nuls* *E3 propriété de l'égalité* *E4 propriété sur les quotients*

Identification de l'énoncé existentiel avec une instance sans changement de lettre.
Pratique mathématique : choisir une lettre de variable différente dans les deux énoncés exitentiels
Point de vue logique : écrire deux instances avec des lettres différentes(cf. Annexe 2)

Objectif 1

Deuxième illustration (?)

> *Conjecture* : Soit $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ deux ensembles et soit $\boldsymbol{f}$ une application de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$. Quelles que soient les parties A et B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Preuve : Montrons tout d'abord que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$: si x est un élément de $f(\,(A \cap B)$, il existe $y \in A \cap B$ tel que $f(y) = x$; comme $y \in A$, $x \in f(A)$; de même; comme $y \in B$, $x \in f(B)$ et donc $x \in f(A) \cap f(B)$. Montrons maintenant que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$: si x est un élément de $f(A) \cap f(B)$, $x \in f(A)$ donc il existe y dans A tel que $x = f(y)$; de même $x \in f(B)$ donc il existe y dans B tel que $f(y) = x$; comme $y \in A$ et $y \in B$, $y \in A \cap B$ et donc $x \in f(A \cap B)$.

« Plan » du TD

Objectif 1 : insuffisance du calcul des propositions
Modalité : « étude » d'une preuve

Objectif 2 : les limites d'une approche implicite
Modalité : étude d'une preuve et d'extraits de dialogues d'étudiants.

Objectif 3 : Présentation d'un outil de modélisation : la déduction naturelle
Modalité : étude d'une preuve

Objectif 4 : Présentation d'un deuxième outil de modélisation
Modalité : modélisation d'un dialogue de validation

Objectif 5 : Essai de décodage du contrat concernant les quantificateurs
Modalité : analyse d'extraits de dialogues

« Objectif » 6 : Mettre en œuvre la notion formelle de stratégie
Modalité : étude d'un texte historique (Seidel)

Objectif 2

La déduction problématique de la preuve du théorème des accroissements finis généralisés peut être vue comme une application de la règle formalisée par l'énoncé $[(\forall x \exists y F(x,y)) \wedge (\forall x \exists y G(x,y))] \Rightarrow [\forall x \exists y (F(x,y) \wedge G(x,y))]$

Bien sûr, cette règle n'est pas logiquement valide. L'exemple de la preuve erronée du théorème 2 fournit une interprétation (il faut néanmoins aller au-delà des seuls polynômes de degré strictement plus petit que 3) pour laquelle la formule est fausse.

Ceci dit, il existe d'autres interprétations pour lesquelles la formule est vraie.

Objectif 2

Exemples

(1) la preuve déjà travaillée du théorème des accroissements finis généralisés pour les polynômes de degré plus petit que 2.

(2) (inspiré de Houzel 1996)

Théorème. Soient f et g deux fonctions définies sur un sous-ensemble A des nombres réels, et a un élément de l'adhérence de A, si $f(t)$ et $g(t)$ ont respectivement h et k comme limites lorsque t tend vers a, alors $f+g$ a $h+k$ pour limite en a.

Preuve. Par hypothèse, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $t \in A$ et $|t-a| < \eta$ alors $|f(t)-h| \leq \varepsilon$ et $|g(t)-k| \leq \varepsilon$. On a alors etc etc…

(3) "Furthermore, in many subsequent proofs, we shall need several simultaneous inequalities to be satisfied, just as in the preceding proof we had inequalities with δ1 and δ2. In each case, we use a similar trick, letting δ be the minimum of δ1, δ2, δ3, . . . needed to make each desired inequality valid. Thus in writing the proof, we omit the intermediate δ1, δ2, δ3, . . ." (Lang, 1968).

Objectif 2

Tout se passe comme s'il s'agissait d'une application de la règle identifiée plus haut. Il n'est certain que les étudiants aient les moyens (expertise mathématique ou outils logiques de contrôle) d'y voir clair.

Nous illustrons cette remarque à l'aide d'une preuve proposée par Liouville et d'extraits de dialogues d'étudiants confrontés à cette preuve.

Tâche :
(1) étudier la preuve proposée par Liouville (usages implicites de règles problématiques ?)
(2) Que perçoivent les étudiants des difficultés mathématiques posées par la preuve de Liouville ?

Objectif 2

Remarque :

L'usage de la règle en question est « relativement » répandu pendant cette période de l’histoire des mathématiques : cf. Duhamel 1856, §26, Bertrand 1864, §2, §11, Houël 1878, § 195 ou Sturm 1863.

« Plan » du TD

Objectif 1 : insuffisance du calcul des propositions
Modalité : « étude » d'une preuve

Objectif 2 : les limites d'une approche implicite
Modalité : étude d'une preuve et d'extraits de dialogues d'étudiants.

Objectif 3 : Présentation d'un outil de modélisation : la déduction naturelle
Modalité : étude d'une preuve

Objectif 4 : Présentation d'un deuxième outil de modélisation
Modalité : modélisation d'un dialogue de validation

Objectif 5 : Essai de décodage du contrat concernant les quantificateurs
Modalité : analyse d'extraits de dialogues

« Objectif » 6 : Mettre en œuvre la notion formelle de stratégie
Modalité : étude d'un texte historique (Seidel)

Objectif 3

Quelques questions

1. Décrire la démarche de l’étudiant et identifier l’erreur contenue dans cette preuve.
2. Quelles commentaires feriez-vous sur la copie de l’étudiant.
3. Faire une analyse de l’élimination puis de la réintroduction des quantificateurs dans la preuve en s’appuyant sur la déduction naturelle de Copi. Quelle est la formule démontrée par l'étudiant ?
4. Question ouverte : quels usages pourraient-on faire de ce type d’outils dans l’enseignement à l’université ?

Objectif 3

« *Synthèse* »

1. L'étudiant semble procéder par contraposition. Il utilise seulement une partie des hypothèses qui sont données, ces hypothèses ne suffisent pas à assurer la conclusion du raisonnement. L'erreur semble se situer dans une mauvaise gestion de la dépendance entre les variables.

3. Lors de l'élimination des quantificateurs, les IE sur x et y ont été réalisées après IU sur ε. Il faut donc commencer par des GE avant de faire la GU sur ε lors de leur réintroduction.

La formule démontrée est $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in A^N \exists y \in B \exists n_0 \forall n \geq n_0 d(x_n, y) < \varepsilon$

4. Cette analyse permet d'être plus précis. L'erreur peut s'interpréter comme une erreur dans le processus de réintroduction des quantificateurs. Il y a par ailleurs une confusion entre les formes AE et EA sur laquelle nous reviendrons plus en détail par la suite.

« Plan » du TD

Objectif 1 : insuffisance du calcul des propositions
Modalité : « étude » d'une preuve

Objectif 2 : les limites d'une approche implicite
Modalité : étude d'une preuve et d'extraits de dialogues d'étudiants.

Objectif 3 : Présentation d'un outil de modélisation : la déduction naturelle
Modalité : étude d'une preuve

Objectif 4 : Présentation d'un deuxième outil de modélisation
Modalité : modélisation d'un dialogue de validation

Objectif 5 : Essai de décodage du contrat concernant les quantificateurs
Modalité : analyse d'extraits de dialogues

« Objectif » 6 : Mettre en œuvre la notion formelle de stratégie
Modalité : étude d'un texte historique (Seidel)

Objectif 4

En filigrane : il s'agit d'illustrer en quoi cet outil, et plus particulièrement la notion de stratégie, permet de prendre en charge un part de la dimension pragmatique de la validation.

Tâche 1 :

1. Construire un tableau dialogique (formel ou matériel) pour l'énoncé

$$\forall x \exists y F(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x,y)$$

Par quoi la règle de restriction concernant l'introduction du quantificateur universel dans la déduction naturelle est elle remplacée dans cette approche dialogique ?

Objectif 4

En filigrane : il s'agit d'illustrer en quoi cet outil, et plus particulièrement la notion de stratégie, permet de prendre en charge un part de la dimension pragmatique de la validation.

Tâche 1 :

Construire un tableau dialogique (formel ou matériel) pour l'énoncé

$$\forall x \exists y F(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x F(x,y)$$

Par quoi la règle de restriction concernant l'introduction du quantificateur universel dans la déduction naturelle est elle remplacée dans cette approche dialogique ?

Objectif 4

la restriction concernant IE de la déduction naturelle trouve sa traduction dans des contraintes sur les possibilités stratégiques du Proposant. Cette remarque met en évidence la dimension pragmatique de la gestion des quantificateurs (que puis-je faire ou non dans ma stratégie de preuve).

Cette pragmatique est rarement prise en charge dans l'enseignement. On peut douter que les étudiants perçoivent ces contraintes.

Objectif 4

Tâche 2 : modélisation de la pragmatique d'un dialogue de validation

Proposer une modélisation du dialogue de validation (il s'agit d'élèves de terminale scientifique).

Objectif 4

Dernier exemple : il s'agit de montrer en quoi la notion modélisatrice de stratégie gagnante de l'approche par les jeux de la validation permet de construire des interprétations des comportements langagiers de validation, en particulier en ce qui concerne la manipulation de la quantification.

On s’intéresse à l’énoncé suivant : *pour chaque planète du système solaire, il existe une étoile autour de laquelle elle tourne*. Celui-ci a été soumis à des groupes d’étudiants de première année d’école d’ingénieurs. Leur tâche était de l’évaluer.

Objectif 4

<ins>Analyse a priori : aspect sémantique</ins>

La première étape de la modélisation consiste en une formalisation des énoncés en jeu. Il y a souvent plusieurs possibilités. Je choisis ici de respecter l'ordre d'apparition des quantificateurs. (1) peut se formaliser par $\forall p\ \exists e\ pTe$ (α). On peut observer que (α) est moins informative que $\exists e\ \forall p\ pTe$ (β) qui selon le même choix de formalisation rendrait compte de la proposition *il existe une étoile autour de laquelle tourne chaque planète du système solaire* (2). Tous les modèles de (β) sont en effet aussi des modèles de (α) (dit autrement (α) est une conséquence logique de (β)).

On appelle P_1 cette propriété sémantique.

Objectif 4

Analyse a priori : aspect pragmatique

- On considère que le domaine d'interprétation pour la lettre *e* est constitué de l'ensemble des étoiles de l'univers et que pour la lettre *p*, l'interprétation se fait dans l'ensemble des planètes du système solaire.
- « *p* tourne autour de *e* » est vrai dans les seuls cas ou *e* est le soleil et *p* une planète du système solaire.
- Le jeu sémantique de validation pour la proposition (α) consiste pour le proposant à fournir une étoile pour chaque choix d'une planète du système solaire par son opposant. La stratégie gagnante est $\forall p\ f(p)=Soleil$.

Cette stratégie peut donc être adaptée sans effort pour obtenir une stratégie gagnante pour le jeu sémantique associé à (β) pour lequel le choix de l'étoile par le proposant précède celui des planètes par l'opposant. Appelons P_2 la propriété pragmatique suivante : tout locuteur sachant établir la vérité de (α) sait également établir la vérité de (β).

Objectif 4

<u>Analyse a priori :</u> aspect « communicationnel »

On admettra que dans une conversation ordinaire, les locuteurs ne font pas de rétention d'information. L'assertion (α) ne respecte pas cette règle dans la mesure où d'après P_1, (β) est plus informative que (α), et d'après P_2 celui qui sait établir la vérité de (α), sait aussi établir celle de (β).

Objectif 4

<u>Analyse a posteriori</u>

- L'opposition entre les évaluations « vrai » et « faux » ne résulte pas de désaccord concernant l'évaluation des relations entre les objets considérés mais plutôt sur les contraintes des stratégies de validation qu'ils s'autorisent à utiliser pour évaluer la phrase.

- L'usage de la pragmatique « standard » rend la tâche louche, la contrainte communicationnelle (élément de contrat) de non rétention n'est pas respectée.

- Ce constat conduit certains étudiants à modifier l'interprétation des règles sous-jacentes à la validation en se restreignant aux fonctions de stratégie injective..

« Plan » du TD

Objectif 1 : insuffisance du calcul des propositions
Modalité : « étude » d'une preuve

Objectif 2 : les limites d'une approche implicite
Modalité : étude d'une preuve et d'extraits de dialogues d'étudiants.

Objectif 3 : Présentation d'un outil de modélisation : la déduction naturelle
Modalité : étude d'une preuve

Objectif 4 : Présentation d'un deuxième outil de modélisation
Modalité : modélisation d'un dialogue de validation

Objectif 5 : Essai de décodage du contrat concernant les quantificateurs
Modalité : analyse d'extraits de dialogues

« Objectif » 6 : Mettre en œuvre la notion formelle de stratégie
Modalité : étude d'un texte historique (Seidel)

Objectif 5

Hypothèse à tester : Le traitement essentiellement implicite de la réintroduction des quantificateurs peut conduire les étudiants à se comporter comme si cette tâche n'était pas à leur charge.

L'énoncé ci-dessous a été proposé à deux groupes d'étudiants de première année à l'INSA de Lyon (école d'ingénieurs).

Enoncé. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et $f \in L(E)$ telle que $\forall x\ (x,f(x))$ est lié.
Montrer que $\exists \lambda \in \mathbf{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$

Objectif 5

<u>Analyse *a priori*</u> :

1. Dimension « épistémologique » : Quelle est la difficulté à laquelle sont confrontés les étudiants ?

2. Dimension « pragmatique » : quel est la forme du jeu de validation associé à cet énoncé ?

Objectif 5

Dimension « épistémologique » :

l'élimination des quantificateurs commence par IU suivie de IE. Il faut donc les réintroduire en commençant par IE.

Objectif 5

Dimension « pragmatique » :

	Opposant	Proposant
(1)	$\forall x \exists \alpha \exists \beta [(\alpha, \beta) \neq (0,0) \wedge \alpha x + \beta f(x) = 0]$	
(2)		$?\ x$
(3)	$\exists \alpha \exists \beta [(\alpha, \beta) \neq (0,0) \wedge \alpha x + \beta f(x) = 0]$	
(4)		$?\ ?$
(5)	$(\alpha, \beta) \neq (0,0) \wedge \alpha x + \beta f(x) = 0$	
(6)	$\ldots$	
(7)	$f(x) = \lambda x$	
(8)		\$\$\$

Objectif 5

Analyse a posteriori :

- Analyser la prise en compte de la quantification par les étudiants avant et après l'intervention de l'expérimentateur *N*.

- Confronter ces données à l'hypothèse didactique formulée (le contrat didactique décharge la responsabilité des étudiants concernant la réintroduction des quantificateurs)

- Dans la fin du corpus, les étudiants s'engagent dans un dialogue matériel alors que jusque là l'essentiel du travail avait été formel. Quel peut être l'objectif de cette évolution de leur stratégie de recherche ?