XVI^e^ École d'Été de Didactique des Mathématiques

Carcassonne

Vendredi 26 Août 2011

Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques

Viviane Durand-Guerrier

vdurand@math.univ-montp2.fr

Université Montpellier 2 (France)

Institut de Mathématiques et Modélisation, équipe ACSIOM

TD associé au cours

Modélisations logiques en situation de Validation

Responsables

Th. Barrier, LML, Université d'Artois
V. Durand-Guerrier, I3M, Université Montpellier 2

Plan du cours

Première partie

Apports de l’analyse logique du langage pour enrichir les analyses *a priori* et *a posteriori* en didactique des mathématiques.

Interlude

Deuxième partie

Apports et usages des modélisations logiques pour l’étude des situations de validation en mathématiques.

Prélude

Aperçu sur le rôle des catégories logiques dans les travaux de Gérard Vergnaud

Sur l’intérêt des catégories logiques pour parler des processus de conceptualisation

« Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l’iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu’à l’aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets - arguments » (Vergnaud, 1991)

A propos du système d'invariant opératoire

« Il s'agit du système de concepts-en-acte et théorèmes-en -acte qui permet de penser le réel et d'agir. Les concepts se développent dans l'action et sous-tendent les formes d'organisation de l'activité que sont les schèmes. Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle théorème-en-acte, y compris pour d'autres domaines que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence) ; ils peuvent rester implicites : ils peuvent même être faux.

A propos du système d'invariant opératoire

(…)Les invariants opératoires sont les constituants essentiels des schèmes, mais ils n'en épuisent pas le contenu, notamment à cause du rôle essentiel, dans le fonctionnement des schèmes, des buts, des règles et des inférences. » (Vergnaud, 1997)

A propos du système d'invariant opératoire

•Un théorème-en-acte est un invariant opératoire ayant un certain *domaine de validité.*

•Il existe donc des domaines d'interprétation (des contextes ou domaines de réalité) dans lesquels un théorème en acte donné conduit à une règle d'action valide, même si ce n'est pas un théorème de la théorie mathématique de référence, ou de la théorie locale considérée, c'est-à-dire même s'il ne découle pas logiquement des axiomes assumés dans cette théorie.

A propos du système d'invariant opératoire

- Lorsqu'un théorème en acte est utilisé en dehors de son domaine de validité, il peut conduire à des décisions d'action, ou à des prévisions erronées.

- Éprouver la limite de validité de l'énoncé peut se faire en classe par la rencontre *provoquée* avec une interprétation (un contexte, un domaine de réalité) dans laquelle l'utilisation de ce théorème en acte est mis en défaut, en particulier parce qu'il fait émerger une contradiction entre les résultats qu'il permet de prévoir et les résultats que l'on peut éprouver expérimentalement.

Un exemple classique qui résiste bien au delà de l'école primaire

Pour comparer deux nombres décimaux, on compare d'abord les parties entières puis, si elles sont égales, on compare les parties décimales.

Un contexte classique où son application conduit à une prédiction erronée

- Comparer l'aire de deux rectangles R_1 et R_2 dont les mesures des côtés sont respectivement en cm : 4,5 et 3 pour R_1 ; 5,3 et 2,5 pour R_2.

- Le calcul fournit 13,5 cm^2 pour l'aire de R_1 et 13,25 cm^2 pour l'aire de $R_{2.}$

- L'application du théorème en acte ci-dessus conduit à affirmer que l'aire de R_1 est plus petite que l'aire de $R_{2,}$ ce que contredit la comparaison par découpage sur papier millimétré.

Deux domaines d’interprétation inadaptés

- L’ensemble des décimaux pouvant s’écrire avec exactement un chiffre après la virgule
- L’ensemble des décimaux pouvant s’écrire avec exactement deux chiffres après la virgule

✓la règle de comparaison précédente est valide

mais

✓la multiplication n’est pas une opération interne

Le domaine d'interprétation considéré (implicitement)

L'ensemble des décimaux. Dans cet ensemble

- la multiplication est une loi de composition interne.
- la règle de comparaison précédente n'est plus valide.

N.B. *Pour dépasser la difficulté, on dispose de deux méthodes*

- mettre les nombres au format de celui qui a le plus grand nombre de chiffres après la virgule
- appliquer la règle de comparaison « chiffre à chiffre »

Un axiome sur les aires

Si trois domaines deux à deux disjoints *A*, *B* et *C* d'aire non nulle sont telles que B = A ∪ C, la mesure de l'aire de B est supérieure strictement à la mesure de l'aire de A

La théorie des nombres décimaux doit permettre de calculer et de comparer les aires en accord avec

1) L'axiome sur les aires.

2) Les résultats empiriques correspondants lorsque ceux-ci ne sont pas ambigus.

Un axiome sur les aires

Pour que les résultats sur les aires jouent leur rôle, il faut qu'ils soient dans le milieu objectif de l'élève (pas seulement dans le milieu matériel), *ce qui suppose que les méthodes de comparaisons avant la mesure aient été travaillées auparavant*.

Les aires (comparaison, opérations) peuvent alors fournir une *sémantique* pour la *syntaxe* des décimaux (règles de comparaison, opération et règles de calcul).

Première partie

Apports de l'analyse logique du langage pour enrichir les analyses *a priori* et *a posteriori* en didactique des mathématiques.

1. Les catégories logiques fondamentales

2. Une théorie sémantique de la vérité

3. Illustration sur un exemple des apports des analyses logiques pour les analyses *a priori* et *a posteriori*

1.
les catégories logiques fondamentales

Propositions, propriétés, relations, phrases ouvertes

Proposition

Une entité linguistique susceptible d'être vraie ou fausse

Certaines phrases ne sont pas des propositions : les ordres ; les prières ; les questions etc..

(Aristote, les Stoïciens, Frege, Russell, Wittgenstein, Tarski, …)

Les **propositions singulières**

- La France est un pays européen
- Le nombre 119 est premier
- Π est un nombre transcendant
- La fonction « *exponentielle* » est croissante sur $\mathbf{R}$

Les propriétés d'objets

« Etre un pays européen »
« être un nombre premier »
« être un nombre transcendant »
« être une fonction croissante »

Elles sont modélisées par des fonctions propositionnelles (des prédicats) à une place, qui permettent d'obtenir des formules atomiques

« $P(x)$ »

interprétées par des *phrases ouvertes*
(x est une variable libre)

Exemple de phrase ouverte associée à une propriété

Soit la formule atomique $P(x)$

Domaine d'objets : ensemble des entiers naturels

Interprétation de P : « être un nombre premier »

Phrase ouverte associée : « x est un nombre premier »

(*x est* une *variable libre*, un *marque place*).

Une phrase ouverte n'a pas de valeur de vérité

En attribuant un objet à la variable, on obtient une proposition singulière :

29 est un nombre premier / 119 est un nombre premier

Lorsque la proposition obtenue est vraie, on dit que *l'élément satisfait la phrase ouverte* ; sinon, on dit qu'il ne la satisfait pas (Tarski, 1936)

Les **relations** entre objets

« être la capitale de »

« être à l’intérieur de »

« *être inférieur à* »

« être la fonction composée de… et de…. »

Elles sont modélisées par des fonctions propositionnelles (prédicats) à deux places ou plus qui permettent d’obtenir des formules atomiques

$R(x, y)$; $R(x, y, z)$ etc..

interprétées par des phrases ouvertes.

Exemple de phrase ouverte associée à une relation

Soit la formule atomique $R(x, y)$

Domaine d'objet : ensemble des nombres réels

Interprétation de R : « être inférieur à »

« x est inférieur à y » (x et y variables libres) ;

Notation mathématique : « $x < y$ ».

En attribuant un nom d'objet à chaque lettre de variable, on obtient une proposition singulière, qui est soit vraie, soit fausse : « $2 < 3$ » vraie « $\pi < 3$ » fausse

Le couple (2, 3) satisfait la relation « être inférieur à »

Le couple (π ,3) ne la satisfait pas.

Les équations et les inéquations sont des phrases ouvertes.

Propriété *versus* relation – un exemple en arithmétique (M. MAJAJ, 2011)

Questionnaire proposé à des élèves de seconde

« Pouvez-vous expliquez les expressions suivantes »

« être divisible par »

…

186 élèves – 67 élèves proposent une reformulation sous la forme d'une propriété qui correspond plus ou moins à la définition de la propriété « être composé » :

« Que l'on peut diviser par »

« Il peut être divisé par un autre nombre »

Arguments

On peut attribuer aux variables libres deux types **d'arguments** pris dans un domaine d'interprétation pertinent

1-Termes singuliers ou noms propres

« ***29*** est un nombre premier » ;

« ***119*** est un nombre premier » ;

« La mesure ***c*** du côté du cube posé sur le bureau est telle que $\boldsymbol{c}^3 = 7\boldsymbol{c} + 1$ »

On obtient une proposition singulière ; elle est vraie ou fausse.

On peut reformuler le dernier exemple en écrivant :

« La mesure ***c*** est un nombre solution de l'équation $x^3 = 7x + 1$ » où x est une variable libre

Remarque : le changement de lettre permet de mettre en évidence que dans les équations, les lettres ont le statut de variable libre (marque place).

2 - Eléments génériques

Eléments du domaine n'ayant pas d'autres propriétés que celles communes à tous les éléments du domaine.

- **soit *n*** un entier naturel *,*

La phrase « *n* est un nombre premier » *est vraie pour certains éléments, fausse pour d'autres.*

- Soient *a* et *b deux réels et f une fonction numérique*

La phrase « *b* est la valeur de *f* en *a* » est *vraie pour certains triplets ; fausse pour d'autres*.

Dans de tels cas, on ne peut pas attribuer une valeur de vérité.

Ce sont des énoncés *contingents*.

Termes composés

Dans un langage donné comportant des symboles de constantes et de fonctions, on peut fabriquer des termes dont l'interprétation dépendra du statut logique des lettres qui interviennent :

Exemple : « $x^2 - x + 11$ » (domaine d'objets : **N**)

désigne ***un élément singulier*** de **N** si *x* désigne un ***élément singulier*** de **N** ;

désigne ***un élément générique*** de l'ensemble image de **N** par la fonction associée, si *x* désigne ***un élément générique*** de **N ;**

est ***une expression algébrique*** si *x* est une ***lettre de variable ;*** elle ne désigne aucun élément de **N.**

Quantification

Dans une formule atomique, ou dans une formule comportant des variables libres, on peut lier les *variables libres* avec **un *quantificateur*** *;* on dit alors que les ***variables sont liées*** (ce sont des lettres muettes)

Si toutes les variables sont liées (sont dans le champ d'un quantificateur) l'énoncé obtenu est **un énoncé clos.**

En logique du premier ordre et en mathématiques, on utilise deux types de quantificateurs avec un point de vue objectuel (en accord avec le sens commun) :

Universel : pour tout, quelque soit

Existentiel : il existe (au moins un)

(*Aristote, Frege, Russell, Tarski, Quine*)

Ces deux quantificateurs sont inter définissables via la négation.

Exemples

- Tout nombre entier impair est premier
- Quelque soit x réel, $x^2 + 1 \neq 0$
- Pour tout x réel, pour tout y réel $x^2 + y^2 < (x + y)^2$
- Il existe au moins un nombre premier compris entre 7 et 49
- Pour tout nombre entier non nul n, il existe au moins un nombre premier compris entre n et n^2.

Les énoncés ainsi obtenus ont une valeur de vérité à condition que le domaine de quantification soit précisé.

Si on ne précise pas le domaine d'objet considéré, l'énoncé « Pour tout x, $x^2 + 1 \neq 0$ »

n'a pas de valeur de vérité : il est vrai dans $\mathbf{R}$ et faux dans $\mathbf{C}$.

Formalisation (avec ou sans implication)

Tout nombre entier impair est premier

$$\forall x \in \mathbf{I}\ P(x)$$

$$\forall x \in \mathbf{N}\ (I(x) \Rightarrow P(x))$$

Pour tout nombre entier non nul *n*, il existe au moins un nombre premier compris entre *n* et n^2.

$$\forall n \in \mathbf{N^*}\ [(\exists m \in \mathbf{P}\ \ \mathbf{n \leq m \leq n^2}))$$

$$\forall n \in \mathbf{N}\ [\mathbf{n} \neq 0\ \Rightarrow (\exists m \in \mathbf{N}\ \ (\mathbf{P(m)} \wedge\ \ \mathbf{n \leq m \leq n^2}))]$$

Dans les manuels universitaires, jeu d’apparition/disparition de l’implication (Chellougui, 2004)

Définition versus théorème

Une définition est une phrase ouverte, associée à une propriété, satisfaite par certains objets d'un domaine donné (éventuellement par un seul objet) et pas par d'autres.

Exemple :

Domaine **N** des entiers naturels ; « être un carré parfait »

$P(x) : \exists y\ (y \in \mathbf{N} \wedge x = y^2)$

On peut

- élaborer des objets satisfaisant une définition
- Déterminer si un objet donné satisfait une définition
- Sachant qu'un objet donné satisfait (ou ne satisfait pas) une définition, utiliser la proposition obtenue dans une preuve (un raisonnement).
- Utiliser dans un raisonnement, une preuve, *l'équivalence définitoire :* $\forall x \in \mathbf{N}\ [P(x) \Leftrightarrow_{def} \exists y\ (y \in \mathbf{N} \wedge x = y^2)]$

Un théorème est un énoncé clos (il ne contient pas de variable libre) vrai sur un domaine d'interprétation donné (une théorie)

Exemples

- Le nombre π est un nombre transcendant.
- Pour tout entier naturel, soit c'est un carré parfait, soit il n'existe pas de nombre rationnel dont il soit le carré.

$$\forall x \in \mathbf{N}\ [(\exists y \in \mathbf{N}\ x = y^2)) \vee (\forall y \in Q\ x \neq y^2)]$$

- Le corps des nombres complexes est algébriquement clos.

Autour de la borne supérieure (Chellougui 2004, 2009)

Soit A une partie non vide d'un ensemble E donné

Propriété d'objet : « être un majorant de A» (pour un objet de E)

Propriété de structure : être majorée (pour une partie A de E) (posséder un majorant) /avoir un plus petit élément

Propriété d'objet : « être la borne supérieure de A » (être le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A)

(relation associée : « être la borne supérieure de »)

Théorème : Dans $\mathbf{R}$, toute partie majorée non vide possède une borne supérieure.

Propriété de structure : propriété de la borne supérieure (L'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels satisfait la propriété de la borne supérieure / L'ensemble $\mathbf{Q}$ ne la satisfait pas.

Quantifications multiples

Sur l’expression « deux à deux » en mathématiques

Que signifie la phrase : (*sémantique)*

« Les faces d’un polyèdre régulier sont deux à deux superposables » ?

1. Chaque fois que je prend deux faces, elles sont superposables
2. Chaque fois que je considère une face, je peux en trouver une différente que je peux superposer.

Analyse logique : (*syntaxe*)

Une relation binaire S(x, y)

Deux manières de clore l’énoncé sur l’ensemble formé des faces

1. $\forall x\ \forall y\ S(x, y)$
2. $\forall x\ \exists y\ (y \neq x \wedge S(x, y))$

Sur l’expression « deux à deux » en mathématiques

Comprendre un énoncé, c’est savoir ce qui est la cas lorsqu’il est vrai (Davidson) (*pragmatique*)

- Lors d’ un débat entre professeurs en formation continue : les deux interprétations rivales sont actualisées : réalisation de polyèdres satisfaisant 1, et de polyèdres satisfaisant 2.
- Ici, le contexte seul ne permet pas de choisir entre les deux interprétations.
- Pour trancher, il faut se référer à la définition mathématique.

Sur l’expression « deux à deux » en mathématiques

- Un parallélogramme est un quadrilatère dont les faces sont parallèles deux à deux. (2)
- Deux triangles sont isométriques *ssi* les angles correspondants sont congrus *deux à deux*. (2)
- Dans un polynôme à coefficients réels, les racines complexes non réelles sont conjuguées *deux à deux (2)*
- Une partition d’un ensemble E est un ensemble fini de parties non vides de E *deux à deux* disjointes dont la réunion est égale à E. (1)
- Dessiner un quadrilatère dont les côtés ne sont pas égaux *deux à deux* (*quelle interprétation* ?)

Sur l’expression « deux à deux » en mathématiques

- Une ambiguïté *sémantique* inhérente aux relations binaires ;
- Choisir une formalisation de l’énoncé (une forme *syntaxique*) revient à choisir une interprétation : la formalisation logique permet de lever les ambiguïtés ;
- Choisir l’interprétation idoine relève de la dimension *pragmatique*, qui met en jeu le contexte mathématique, les connaissances du sujet relativement à ce contexte, la présence ou non d’un milieu fournissant des rétroactions, la possibilité ou non de se procurer des informations pertinentes etc....

Sur les énoncés de la forme « Pour tout x, il existe y » *vs* « Il existe x, pour tout y »

En langue naturelle, une tendance à l'interprétation la plus favorable vis à vis de la vérité (Dubinsky & Yparaki, 2000)

« Il existe une mère pour tout homme » / $\forall y\ \exists x\ (x = M(y))$

En mathématiques, l'ordre des quantificateurs détermine la signification.

Pour un certain nombre d'étudiants, l'ordre est indifférent (Chellougui, 2004, 2009)

Etrange définition d'un majorant: $\forall M\ \exists x\ (x < M)$

Etudiants : « Pour tous les étudiants « $\forall x\ \exists y$ » et « $\exists$y $\forall$x » c'est pareil » (geste à l'appui).

2.
Un point de vue sémantique sur la vérité

Le concept de vérité dans les langages formalisés

« Construire une définition de l’expression " proposition vraie" ; définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte » (Tarski, 1936-a, 1972, Le concept de vérité dans les langages formalisés p.159).

« Dans cette étude, je ne cherche qu’à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « classique » de vérité, c’est-à-dire par cette conception selon laquelle « vraiment » signifie la même chose que « conformément à la réalité ». (op. cite., p. 160)

La notion de satisfaction d’une formule ou d’une phrase ouverte par un élément est au cœur de la définition sémantique de la vérité (Tarski, 1936).

Elle permet de construire ***une définition récursive de la vérité des propositions complexes***, via l’extension des connecteurs propositionnels aux prédicats et l’utilisation des quantificateurs.

Elle fournit ***une définition formellement correcte et matériellement adéquate de la vérité*.**

Tarski résout ainsi une difficulté théorique soulignée par Russell : *comment articuler* ***implication matérielle*** *(entre propositions) et* ***implication formelle*** *(universellement quantifiée)*.

Cette élaboration d'une théorie sémantique de la vérité s'inscrit dans un projet général qui vise à établir un rapport original entre forme et contenu :

« Tarski élargit le spectre des concepts métamathématiques propres à permettre d'établir des rapports entre forme et contenu. Plus encore, il définit un type de rapport original où il n'est pas plus question de renoncer aux avantages de la formalisation et de l'analyse syntaxique permis par cette dernière qu'à l'exigence d'en réinvestir les résultats au niveau des

contenus mathématiques, à leur donner une interprétation mathématique concrète »

(Sinaceur H. 1991a, Corps et modèles, Paris : Vrin, p.313)

Extension des connecteurs propositionnels
Implication et négation

Implication entre propositions “si *A*, alors *B*”

Cette relation entre propositions est équivalente à la relation

“non *A* ou *B*”.

Elle est fausse dans le seul cas où *A* est vraie et *B* est fausse (table de vérité)

(Philon de Mégare, Frege, Russell, Wittgenstein, Quine)

Elle est équivalente à sa contraposée « si non *B*, alors non *A* »

Cette définition rentre en conflit avec le sens commun, qui tend à ne considérer que les conditionnels à antécédents vrais.

Implication ouverte "si $P(x)$, alors $Q(x)$" (comportant au moins une variable libre)

Elle n'a pas de valeur de vérité. Etant donné un domaine d'interprétation, elle est satisfaite par les éléments du domaines tel que P(a) et Q(a) vrais (exemples) et par ceux tels que P(a) faux (*hors sujets - M. Legrand*)

Elle est non satisfaite par les éléments tels que P(a) vraie et Q(a) faux (contre-exemples)

Elle n'est presque jamais explicitement considérée dans la classe de mathématique.

Elle est essentielle pour définir ***l'implication formelle*** (universellement quantifiée).

Implication universellement quantifiée

“ Pour tout x, si $P(x)$, alors $Q(x)$”

Elle a une valeur de vérité lorsque le domaine de quantification est précisé.

Elle est alors vraie lorsque chaque élément *a* du domaine considéré satisfait l’implication ouverte associée : c’est soit un exemple, soit un hors sujet.

Elle est fausse sinon ; c’est-à-dire lorsqu’il y a au moins un contre exemple sur le domaine considéré.

N.B. : les exemples et les contre exemples concernent l’implication ouverte : pour pouvoir *substituer des noms d’objets*, il faut travailler avec des *variables libres*

La négation

Une proposition et sa négation

échangent leurs valeurs de vérité

Non A est vraie *ssi* A est fausse

Non A est fausse *ssi* A est vraie

Sur un domaine D, une propriété et sa négation échangent les éléments qui les satisfont

Un élément *a* de D satisfait Non *P*(*x*) *ssi a* ne satisfait pas *P*(*x*)

Un élément *a* de D ne satisfait pas Non *P*(*x*) *ssi a* satisfait P(*x*)

Enoncés quantifiés sur un domaine D

« Pour tout x, non $P(x)$ » est vrai sur D

ssi aucun élément de D ne satisfait $P(x)$,

i.e. ssi « Il existe x, P(x) » est fausse.

« Il existe x, non $P(x)$ » est vraie sur D

ssi un élément de D au moins ne satisfait pas $P(x)$,

i;e. *ssi* « Pour tout x, P(x) » est fausse.

Dans le calcul des prédicats *(lois logiques)*

$(\forall x \text{ non } P(x)) \Leftrightarrow \text{non } (\exists x\, P(x))$

$(\exists x \text{ non } P(x)) \Leftrightarrow \text{non } (\forall x\, P(x))$

$(\exists x\, P(x)) \Leftrightarrow \text{non } (\forall x \text{ non } P(x))$

La déduction naturelle de Copi

- Un système de déduction naturelle se caractérise par des règles permettant de gérer **l'introduction et l'élimination** des connecteurs logiques et des quantificateurs.
- **Pour les connecteurs**, on connaît bien la règle du Modus Ponens qui est la règle *d'élimination de l'Implication* ; on connaît moins bien, et ce bien qu'on l'utilise constamment en mathématiques, la règle *d'introduction de l'implication* : sous l'hypothèse A, on prouve B ; on en déduit « $A \Rightarrow B$ »
- **Pour les quantificateurs**, le système développé par Copi (1950) présente la particularité d'introduire des lettres pour désigner des éléments génériques et d'expliciter les restrictions qui doivent s'appliquer lors de la manipulation de ces lettres. Une présentation en Français se trouve dans Hottois (1989)

Les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs supposent que l'on travaille dans un univers du discours non vide.

•Règle d'élimination du quantificateur universel *: Instantiation Universelle* (IU)

« de $\forall x\ P(x)$, on déduit $P(a)$, où a est une constante individuelle quelconque substituée à x » ; a peut-être un élément singulier où un élément générique de l'univers du discours »

En d'autres termes : « ce qui vaut pour tous vaut pour chacun »

Règle d'introduction du quantificateur universel, *Généralisation Universelle (GU)*

« Pour prouver un énoncé de la forme $\forall x\, P(x)$ sur un domaine donné, on introduit un élément générique a de ce domaine et on prouve que $P(a)$ est vrai, en ne faisant aucune autre hypothèse sur a que son appartenance au domaine. »

Cette règle correspond à la démonstration par élément générique omni présente en mathématique pour démontrer les théorèmes généraux.

Règle d'introduction du quantificateur universel : *Généralisation Existentielle* (GE)

« de P(a), on déduit $\exists x P(x)$, où a est une constante individuelle quelconque, qui peut être soit un élément singulier, soit un élément générique»

Ceci correspond à un des moyens classique de prouver un énoncé existentiel par production d'un élément satisfaisant la propriété.

Élimination du quantificateur existentiel, *Instantiation existentielle* (IE)

« de $\exists x P(x)$, on déduit $P(w)$ où w est une constante individuelle désignant l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit) vérifier $\exists x P(x)$. Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on en ignore l'identité »

Cette règle est la plus délicate à utiliser ; elle est une source fréquente d'erreurs lorsqu'elle est utilisée sans précaution avec des énoncés de la forme $\forall x \exists y\, P(x,y)$.

Dans ce cas, il faut ajouter des règles de restriction, concernant le respect de l'ordre d'introduction et d'élimination des quantificateurs : si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

“ Ce système offre l’intérêt de proposer des démonstrations qui restent au plus près de l’aspect familier des syllogismes. Cette présentation correspond à la volonté de formaliser et d’axiomatiser en ne rompant pas avec la rationalité discursive naturelle. ” (Hottois, 1989)

Il offre une procédure de preuve pour les énoncés valides du calcul des prédicats, ainsi que les syllogismes valides d’Aristote.

Un tel système peut également être utilisé pour contrôler localement la validité de preuves mathématiques, sans recourir à une formalisation complète dans le Calcul des Prédicats, et propose de ce fait un moyen terme entre une position formaliste extrême s’appuyant sur la théorie de la démonstration de Hilbert, inaccessible de fait, et la position inverse qui consiste à dire que les démonstrations mathématiques n’obéissent à aucune règle. (Durand-Guerrier & Arsac, 2003)

Des exemples d’utilisation pour les analyses *a priori* et *a posteriori* se trouvent dans Chellougui, 2004.

Un exemple d’utilisation de ce système pour l’analyse de preuve fait l’objet du TD2.

Négation, implication et Quantification

Langage ordinaire	Calcul des prédicats
• Toutes les boules sont rouges	• $\forall x\, R(x)$
• Toutes les boules ne sont pas rouges	• $\neg \forall x\, R(x)$ ou $\forall x\, \neg R(x)$?
• Il existe (il y a) au moins une boule qui n'est pas rouge	• $\exists x\, \neg R(x)$
• Certaine boule n'est pas rouge / Certaines boules ne sont pas rouges	• $\exists x\, \neg R(x)$
• Il n'y a pas de boule rouge /Aucune boule n'est rouge	• $\neg \exists x\, R(x)$ / $\forall x\, \neg R(x)$

Une ambiguité sémantique du français

En français une phrase de la forme
« Tous les *A* ne sont pas *B* » est ambiguë.

Selon la norme linguistique, elle s'interprète par
« Il est faux que tous les *A* sont *B* », c'est-à-dire
« Certain (s) *A* n'est pas (ne sont pas) *B* ».

Elle traduit la négation de « Tous les *A* sont *B* »

Cependant, elle est souvent employée pour exprimer
« Aucun *A* n'est un *B* » (le contraire au sens d'Aristote)

Exemples (authentiques) :

- ✓ Dans ce rayon, tous les articles ne sont pas soldés
- ✓ Lors de la dernière épidémie de grippe, toutes les victimes n'avaient pas été vaccinées.

Une mise en défaut du principe de substitution

Exemple :

Tous les diviseurs de 12 **sont pairs** (1)

Tous les diviseurs de 12 **ne sont pas pairs** (2)

Tous les diviseurs de 12 **sont impairs** (3)

Selon la norme linguistique française comme (1) est ***Faux***, (2), qui est sa négation, est ***Vrai***

Selon le principe de substitution
(2) et (3) ont la même valeur de vérité

Or (3) est ***Faux***

N.B. Ceci renforce l'interprétation « Aucun »

La négation est une notion complexe, *de nature sémantique* (elle échange le vrai et le faux) qui obéit à *des règles syntaxiques* précises *selon la langue dans laquelle elle s'exprime*.

En français, *la règle syntaxique* qui consiste à faire porter la négation sur le verbe :

- ✓ *est en accord* avec les contraintes sémantiques pour les *propositions singulières*
- ✓ *est source d'ambiguïté lorsque la phrase est quantifiée universellement* ; se pose la question des portées respectives du quantificateur et de l'opérateur de négation ; en général (mais pas toujours), c'est le contexte (*aspect pragmatique*) qui permet de trancher
- ✓ *est en désaccord* avec les contraintes sémantiques lorsque la phrase commence par « *certain(s)* ».

Des difficultés biens réelles pour les élèves et les étudiants

Une enquête de la commission Inter - IREM Université

Questionnaire sur valeur absolue - limites – logique

Etudiants arrivant dans le supérieur en France, rentrée 2006

Donner la négation mathématique de chacune des phrases suivantes

1.Toutes les boules contenues dans l’urne sont rouges.

2.Certains nombres entiers sont pairs.

3.Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Toutes les boules contenues dans l’urne sont rouges

- C0 : Une phrase synonyme de la phrase affirmative **13%**
- C1 : Une phrase synonyme de “il y a au moins un boule qui n’est pas rouge **38%**
- C2 : La phrase ambiguë: “Toutes les boules ne sont pas rouges” **6%**
- C3 : Une phrase synonyme de “Aucune boule n’est rouge **21%**

- Autres réponses: **10%**
- Pas de réponses **12%**

Certains nombres entiers sont pairs.

- C0 : «Tous les entiers sont pairs » **5,5%**
- C2: La phrase ambiguë « Tous les entiers ne sont pas pairs » **5,5%**
- C4: La phrase «Tous les entiers sont impairs» **15,5%**
- C5: La phrase « Aucun entier n'est pair »**13%**
- C6: « Certains entiers ne sont pas pairs (sont impairs) » **34%**
- Autres réponses **11,5%**
- Pas de réponse **15%**

Certains nombres entiers sont pairs.

- C0 : «Tous les entiers sont pairs » **5,5%**
- C2: La phrase ambiguë « Tous les entiers ne sont pas pairs » **5,5%**
- C4: La phrase «Tous les entiers sont impairs» **15,5%**
- C5: La phrase « Aucun entier n’est pair »**13%**
- C6: « Certains entiers ne sont pas pairs (sont impairs) » **34%**
- Autres réponses **11,5%**
- Pas de réponse **15%**

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4

- 98 étudiants (29%) ne donnent pas de réponse ;
- seuls 34 étudiants (10%) donnent une réponse correcte, synonyme de “Il existe au moins un entier divisible par 4 ne se terminant pas 4”.
- 155 réponses (45,5%) sont données sous la forme d’une implication avec des positions variées pour la négation comme dans les exemples suivants.

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4

- Si p, alors non q

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4

- Si non p, alors non q

Si un nombre entier n'est pas divisible par 4, alors il ne se termine pas par 4

- Si p, alors pas nécessairement q

Si un nombre entier est divisible par 4, alors il ne se termine pas forcément par 4

- Si p, alors il est possible que non q

Si un nombre entier est divisible par 4, il est possible qu'il ne se termine pas par 4

Des difficultés renforcées par le bilinguisme
(Ben Kilani, 2005 – thèse en cours de Judith Njomgang Ngansop)

Différences de fonctionnement de la négation en Français, Arabe et Mathématiques.

En Tunisie pas de prise en charge du changement de langue pour les apprentissages mathématiques à l'entrée dans le secondaire (9ème année).

Un accent dans les cours de langue sur la forme négative et la variété du vocabulaire

« Il regarde **toujours** la télévision / il **ne** regarde **jamais** la télévision »

Pas de travail explicite sur la négation dans le cours de mathématique.

Difficultés dans le cas de traduction mot à mot.

3.

Un exemple d'utilisation de l'analyse logique du langage pour enrichir les analyse a priori et a posteriori

Les règles du débat en question

$n^2 - n + 11$ est-il toujours un nombre premier ?

- Arsac & al. (1992) *Initiation au raisonnement déductif.*
- *Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*, Presses Universitaires de Lyon, IREM de Lyon
- « (...) il s'agit au niveau des classes de sixième et cinquième (enfants de 11 et 12 ans) de permettre aux élèves de s'approprier les règles du débat mathématique (…) » (p.1)

Règle n°1 : ***Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux***.

Cette règle ne s'applique pas toujours ; en effet certains énoncés mathématiques sont contingents (ni vrai, ni faux) ; on l'a vu plus haut.

Règle n°2 : Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé.

Cette règle s'applique exclusivement aux énoncés universels.

En outre, dans une démarche de recherche, on ne s'arrêtera pas lorsque l'on aura trouvé un contre-exemple ; on cherchera s'il y en a d'autres ; si on peut les caractériser ; et/ou on cherchera quel est le plus grand domaine sur lequel l'énoncé est vrai

Règle n°1 : ***Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux***.

Cette règle ne s'applique pas toujours ; en effet certains énoncés mathématiques sont contingents (ni vrai, ni faux) ; on l'a vu plus haut.

Règle n°2 : Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé.

Cette règle s'applique exclusivement aux énoncés universels.

En outre, dans une démarche de recherche, on ne s'arrêtera pas lorsque l'on aura trouvé un contre-exemple ; on cherchera s'il y en a d'autres ; si on peut les caractériser ; et/ou on cherchera quel est le plus grand domaine sur lequel l'énoncé est vrai.

Règle n°3 : ***En mathématiques, pour débattre on s'appuie sur un certain nombre de propriétés ou définitions clairement énoncées sur lesquelles on s'est mis d'accord (axiomes).***

Ceci rappelle que le raisonnement déductif se fait toujours au sein d'une théorie, même locale et renvoie à l'articulation entre vérité et validité (*cf. deuxième partie de ce cours*)
La vérité des axiomes tient à leur conformité avec les faits mathématiques considérés.

Exemple : la commutativité de l'addition est un axiome qui rend compte du fait que quand on dénombre la réunion de deux collections, le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel on réalise ce dénombrement.

Règle n°4 : En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai.

Cette règle ne concerne pas les énoncés existentiels, ni les énoncés universels sur un domaine fini ou sur un domaine infini pour lesquels on peut vérifier tous les cas possibles.

Un énoncé existentiel est vrai si on peut trouver un élément qui vérifie l'énoncé ouvert correspondant.

Exemple : il existe un solide régulier ayant vingt faces triangulaires.

Un énoncé sur un domaine infini peut parfois être prouvé en examinant un nombre de cas fini.

Exemple : Le carré d'un nombre entier ne se termine jamais par 7.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	4	9	1 6	2 5	3 6	4 9	6 4	8 1	0

Dans l'expression $n \times n - n + 11$,
si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?

Règles visées par la situation

- *Règle n°2* : « *un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux* »
- *Règle n°4* : « *des exemples mêmes nombreux, ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé mathématique est vrai* »

Organisation de la situation

- *1er temps* : recherche individuelle
- *2ème temps* : recherche en groupe. Cette recherche s'achève par la production d'une affiche présentant le résultat et les idées du groupe et une explication pour convaincre les autres de la validité de leurs résultats.
- *3ème temps* : débat sur les affiches.
- *4ème temps* : Synthèse sur les règles du débat et (ou) sur l'insuffisance de certaines preuves qui ont été mises en évidence au cours du troisième temps. (p 19)

Deux conditions essentielles

- Il doit y avoir un enjeu qui incite les élèves à s'assurer de la validité du résultat produit. Cet enjeu, qui ne doit pas être lié à l'enseignant, est généralement lié à la compétition entre les groupes qui s'instaure naturellement.
- Le professeur, par son attitude, n'induit ni méthode, ni résultat. Entre autres, il ne dit pas si les solutions proposées sont exactes ou pas : c'est la classe qui en débattra. Evidemment après le débat, le professeur dira si les solutions, les explications retenues sont correctes ou non. (p 18)

Une affiche support d’un débat

OUI

Le résultat n’a toujours que deux diviseurs car c’est toujours un nombre premier (donc impair), car le premier résultat (qui est NxN - N) est égal à un nombre pair donc celui-ci + 11 = un nombre premier (impair).

1er résultat = un nombre pair parce que NxN - N égal N multiplié par son premier nombre inférieur :

Exemple :

5 x 5 - 5 + 11 = 20 + 11 = 31	5x4
8 x 8 - 8 + 11 = 56 + 11 = 67	8x7

Des éléments du débat

(4) Géraldine Nous ne sommes pas convaincus car si on remplace *n* par *11*, cela donnera *11*x*11* - *11* + *11* qui est égal à *121* et qui a trois diviseurs *11*; *121* et *1*.

Géraldine affirme l'existence d'un contre-exemple, sans rejeter explicitement l'énoncé.

(6) Paul Nous ne sommes pas convaincus, car il n'y a que deux exemples. Rien ne prouve qu'avec les autres nombres cette théorie marche.

Paul questionne la valeur générique des deux exemples

(13) Marie Paul et bien, il faut qu'il nous prouve qu'il y en a d'autres...non quand Géraldine....

(15) Marie ...a dit pour 11, il faut qu'il en donne d'autres.

(17) Marie Il faut qu'il en trouve d'autres, à part celui-ci.

Marie ne se laisse pas convaincre par l'identification d'un seul contre-exemple

(18) Paul Un seul suffit.

Paul fait référence à la règle n°2

(19) Marie Il faut qu'il trouve d'autres exemples pour ce qu'il a dit, parce qu'on est pas obligé de mettre une tonne d'exemples, deux c'est suffisant pour expliquer.

Marie donne aux deux exemples une valeur explicative ; notons qu'il y a sur l'affiche un argument de type général : le produit d'un nombre et de son prédécesseur est pair

(29) Stéphanie Oui mais il n’y a peut-être que cette exception. Il faut qu’il nous en trouve d’autres alors.

(31) Marie On n’a pas pensé à *11* mais...s’il y en a d’autres, on serait d’accord avec ce qu’il dit mais...

(32) Prof. Et s’il n’y en a pas d’autres ça ne vaut pas le coup.

Une seule exception ne suffit pas pour renoncer à l’énoncé

(36) Géraldine C’est vrai, il n’y a que *11* comme exception. mais c’est pas entièrement juste, mais pas entièrement faux non plus.

Une seule exception ne suffit pas pour déclarer l’énoncé faux

(40) Elève :Y a une exception, donc c'est pas toujours !

Prise en compte explicite de la quantification universelle

(41) Marie : ça a été reconnu. à part ça, c'est toujours un nombre premier. Si on éliminait *11* ben...

Propose d'éliminer l'exception – restriction du domaine

(57) Prof. Tu as une autre exception?

(58) Elève J'ai pris *22*.

(63) Marie : Oui mais *22*, c'est le double de *11*, on peut peut-être essayer *33*, à mon avis ce sera aussi une exception.

(76) Marie ça devient plus des exceptions parce que *22*, *33* c'est tout des multiples.

Marie identifie une classe de contre-exemples

(87) Géraldine : Une seule exception, s'il n'y a que ça, c'est vrai que c'est …c'est pas entièrement faux ni entièrement vrai.

Ceci peut s'interpréter comme l'affirmation de « il existe des exemples » et « il existe un contre-exemple »

(95) Alexandre : C'est vrai ou c'est faux, ça peut pas être les deux à la fois.

(97) Sébastien En maths, c'est comme ça (rires)

Alexandre explicite la règle n°1, qui correspond au tiers exclu.

Sébastien l'identifie comme une règle spécifique aux mathématiques

((100) Professeur : Alors effectivement c'est une règle (…). En mathématiques, pour que tout le monde soit d'accord, on s'est mis d'accord, les propriétés ne sont jamais à la fois vraies, à la fois fausses. Elles sont soient vraies, soit fausses. On ne peut pas avoir à la fois vrai et à la fois faux.

Le professeur institutionnalise la règle n°1, qui n'était pas a priori visée par la situation.

Il ne met pas en évidence la présence de la quantification universelle dans l'énoncé, alors que les élèves convaincus que l'énoncé est faux insistent sur le fait que « ce n'est pas toujours » puisqu'il y a une exception.

Les propriétés ne sont ni vraies ni fausses ; elles sont vérifiées ou non par les éléments du domaine considéré.

Retour sur les interventions de Marie

- *Les interventions de Marie peuvent s'interpréter en considérant une application pragmatique de la règle. Elle ne veut pas renoncer à la vérité de l'énoncé, et pour le préserver, elle propose d'éliminer 11 et ses multiples. Elle accepte de rejeter l'énoncé seulement quand un élève produit le contre-exemple 25.*
- *Le professeur semble penser que le débat porte sur le nombre d'exception, mais pour Marie il semble plutôt que 25 est un contre-exemple crucial car d'une certaine manière imprévisible.*

A la fin du débat, Marie ajoute

•(91) A mon avis pour qu'il n'y ait pas d'exception, le résultat ne devrait pas être supérieur à 100.

•*Ceci semble confirmer qu'elle cherche à déterminer un domaine sur lequel l'énoncé est vrai.*

On peut considérer que Marie est engagé dans une véritable démarche scientifique.

Une présentation plus ouverte de la situation pourrait permettre de faire vivre cette dimension : par exemple, en posant le problème sous la forme :

« Dans l'expression « $n^2 - n + 11$ », on remplace n par différentes valeurs ; pour quelles valeurs de n obtient-on un nombre premier ? »

Retour sur les catégories logiques

Les échanges mettent en évidence la présence des différentes catégories logiques identifiées

- Enoncé clos (universels) qu'il faut évaluer – variable liée ;
- Enoncé ouvert associé avec lequel les élèves travaillent - variable libre avec le statut de marque – place ;
- Eléments singuliers : valeurs substituées à la variable *n* ;
- Elément génériques (sur l'affiche : N×N – N) ;
- Exemples – contre-exemples – classe de contre-exemples ;
- Implicitement, énoncés existentiels ;
- Enoncés contingents (parfois vrais, parfois faux).

Les analyses précédentes montrent

1. Qu'il est nécessaire en mathématiques de prendre en compte les énoncés contingents (*remise en question de la règle n°1*)
2. Que dans le cadre d'une démarche de recherche en mathématiques, les règles de raisonnement doivent être appliquées de manière pragmatique, car une application rigide peut empêcher la poursuite de la recherche (*principalement la règle n°2*).
3. On peut faire évoluer les situations sous une forme plus ouverte en modifiant l'énoncé de la consigne (par exemple, trouver un domaine le plus grand possible pour lequel l'énoncé est vrai)

4. Que la logique de sens commun n'est pas aussi éloignée de la logique mathématique qu'on le dit habituellement, sous réserve de prendre en considération les propriétés et les relations, et les objets auxquels elles s'appliquent.
5. Que comme le dit Quine, pour interpréter les énoncés de nos interlocuteurs, il faut choisir l'interprétation la plus favorable, celle qui préserve la vérité et le sens de leurs propos. Ce que nous avons fait en reformulant les propos de Géraldine qui pourraient sembler incohérents (l'énoncé est à la fois vrai et faux) sous la forme « l'énoncé à des exemples et des contre-exemples ». *Une divergence linguistique est plus vraisemblable que la « stupidité » de votre interlocuteur (Quine).*

- "Contrairement à l'opinion commune, la grande affaire de la science est moins la production de vérités absolues et universelles ou la reconnaissance d'erreurs rédhibitoires, que la délimitation des conditions de validité d’énoncés dont, pour le coup, le scientifique hésite à les dire "vrais" ou "faux" sans qualification. Pour qu'un résultat expérimental ou une loi théorique puissent être déjà pris en considération, pour qu'ils puissent ne fut-ce qu’être discutés comme scientifiques, ils doivent être discutés comme "vrais si..." ou "faux, mais..". Les vérités de la science ne sont jamais nues. Et c'est l’énonciation, contraignante, des conditions, circonstances et hypothèses d'une assertion, qui seule lui donne sens et permet de l'accepter ou de la refuser."
- Lévy-Leblond,J.M.,1996, *Aux contraires. L’exercice de la pensée et la pratique de la science*, Paris, Gallimard, p.35.

Interlude

Un exemple de raisonnement indirect inspiré de Frege

- **Un fait (1) : Un crime à l'arme blanche a été commis à Paris le 24 juin 1874.**

Une implication formelle posée comme vraie (quantification universelle implicite*)*

« Si une personne a commis ce crime, alors elle était à Paris le jour du crime. » (1)

- **Un fait (2) : Pierre est un suspect**

Une implication matérielle vraie (une instance de l'énoncé ouvert associé à 1)

« *Si Pierre a commis ce crime, alors Pierre était à Paris le jour du crime* » (2)

Un fait (3) : Pierre n’était pas à Paris le jour du crime.

Un fait (4) : Pierre a un alibi.

Une assertion : le conséquent de l’implication est faux ; sa négation est donc vraie

« Pierre n’était pas à Paris le jour du crime. » (3) VRAI

Conséquence : l’antécédent de l’implication est faux ; sa négation est donc vraie

« Pierre n’a pas commis ce crime » (4) VRAI

Un fait (5) : Pierre est innocenté.

Remarque 1: L'innocence de Pierre est un fait, *indépendant de la preuve* ci-dessus.

Remarque 2 : Produire un alibi permet de prouver l'innocence, qui a été mise en doute (*Pierre est suspect*). La vérité de (3) est une conséquence logique des prémisses ; le raisonnement logique porte sur les énoncés, pas sur les faits.

Remarque 3 : L'alibi peut être un "faux" ; en fait Pierre était à Paris le jour du crime. Ceci ne signifie pas que l'antécédent de (3) soit vraie.

Remarque 4 : Pour établir la culpabilité ou l'innocence de quelqu'un, on cherche des "preuves" matérielles (autrement dit des faits) pouvant fournir des prémisses à des raisonnements fondés sur des énoncés conditionnels tenus pour vrais.

Remarque 5 : En l’absence de telles “preuves” matérielles, on s’intéresse aux mobiles, qui peuvent conduire à identifier des suspects. Ceci fournit seulement des prémisses hypothétiques, et ne permet donc pas de tirer des conclusions nécessaires.

Remarque 6 : Cet exemple montre que la nécessité de considérer les implications dont l’antécédent est faux ne vaut pas seulement en mathématiques

Remarque 7 : Ce mode de raisonnement indirect est disponible chez les enfants vers 8 ou 9 ans ; on le rencontre dès le collège, mais il est peu valorisé. Il permet pourtant de se passer de la contraposée.

Remarque 8 : La distinction entre *fait* et *énoncé* est essentiel pour la conduite des raisonnements, y compris en mathématiques.

« En l'absence de témoins et de preuves matérielles, personne, hormis M. Strauss-Kahn et Nafissatou Diallo, ne saura donc si la *"relation sexuelle précipitée"* qui a eu lieu entre eux le 14 mai dans la chambre du directeur du FMI au Sofitel de New York, selon le rapport du procureur, était forcée ou consentie. Enfin libre de quitter les Etats-Unis si le juge suit la recommandation du procureur, M. Strauss-Kahn n'aura pas pour autant été innocenté. »

(Le Monde, 23 Août 2011)

Deuxième partie

Apports et usages des modélisations logiques pour l'étude des situations de validation en mathématiques.

1. Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques
2. La théorie élémentaire des modèles pour analyser l’activité de recherche mathématique
3. La sémantique des jeux comme outil d’analyse des dialogues en situation de validation

1.

Retour sur le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques

« Dans une mathématisation complète, on s'assure qu'un fait est vrai sur une base expérimentale, puis on s'assure que dans la théorie qu'on a bâtie par ailleurs, on peut déduire le fait en question. »

(Chevallard, 2004, p.35).

"[Le] lien crucial entre mathématiques et vérité apodictique place le point de vue de la validation au centre des problèmes d'enseignement des mathématiques" (Margolinas (1993) p.24)

Trois catégories de situations adidactiques

« Les relations d'un élève avec le milieu peuvent être classées en au moins trois grandes catégories :

•- les échanges de jugement **[**3**]**,

•- les échanges d'information codées dans un langage **[**2**]**,

•- les échanges d'informations non codées ou sans langage : les actions et les décisions qui agissent directement sur l'autre protagoniste **[**1**]**. » (Brousseau, 1986, 1998, p. 98)

En référence à la logique dialogique de Lorenzen, dans le schéma de la validation explicite (ou schéma de la preuve), l'émetteur devient un proposant et le récepteur devient un opposant.

On est en présence d'un enjeu de vérité et il s'agit « de rattacher de façon sûre une connaissance à un champ de savoirs déjà établis. (Brousseau, Conférence de Montréal, p.8).

N.B. La logique dialogique de Lorenzen est présentée dans Barrier (2008). Dans ce modèle, on peut établir des théorèmes de logique fondés sur l'échange d'énoncés.

Dans la description du jeu de la preuve donnée par Brousseau, il n’apparaît pas clairement de quels moyens on dispose pour décider que le dialogue est terminé, ni si la situation de validation permet de garantir que les joueurs vont parvenir à un accord qui soit conforme aux savoirs mathématiques en jeu.

Supposons que P déclare (E) « Pour tout x, A(x) »

Pour mettre en doute cette proposition, l'interlocuteur O doit proposer une valeur *n*, dont il espère que ce sera un contre-exemple

P doit alors exhiber une preuve de $A(n)$, sinon, il a perdu.

Plaçons nous dans le cas où P a perdu, faute de pouvoir prouver $A(n)$ pour un certain *n*.

Quelle conclusion peut on en tirer quant à la vérité de l'énoncé ?

Aucune évidemment : ce n'est pas parce que P n'est pas capable de prouver $A(n)$, que *n* constitue un contre-exemple à l'énoncé.

L'opposant est engagé ici dans un processus de réfutation.

Brousseau propose deux types de réfutation :

(1) pragmatique ; (2) individuelle.

La réfutation pragmatique consiste à ce que l'opposant B «oblige» le proposant A à jouer un coup perdant, et ce aussi souvent qu'il a la main jusqu'à ce que le proposant retire sa déclaration (ibid. p.111).

Néanmoins, si le proposant A ne reconnaît pas que les coups perdants sont des contre-exemples, il n'a pas de raison de retirer sa déclaration, et le jeu pourrait ne pas s'arrêter.

La réfutation intellectuelle consiste pour l'opposant B à proposer une réfutation de la déclaration du proposant A ; si A accepte, B devient le proposant ; A peut accepter ou non la réfutation (ibid. p. 111).

Pour un énoncé du type (E), une réfutation en logique classique est l'affirmation de l'énoncé (F) « Il existe x non $A(x)$ ».

Pour soutenir cette déclaration, en logique effective, il faut produire un exemple.

Il se peut cependant que A ne veuille pas retirer sa déclaration, et ce quoiqu'il accepte l'exemple proposé ; il cherche par exemple à sauver son énoncé en éliminant les exceptions *(cf. plus haut Marie qui cherche à conserver l'énoncé « n xn - n + 11 est toujours un nombre premier »)*

« Dans le cadre de la théorie des situations didactiques, les situations de preuve sont beaucoup plus complexes que dans le modèle de Lorenzen. » (Locia Espinoza, 2000, p. 50).

« Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s’affrontent à propos d’un objet d’étude composé des messages et descriptions que l’élève a produit d’une part, et du milieu adidactique qui sert de référent à ces messages d’autre part.

Les deux joueurs échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple milieu/message »

(Brousseau, 1998, p. 109)

« (…) il est utile de conserver la distinction faite en logique entre l’énoncé considéré comme une expression bien formée ou comme un ensemble de réalisations et l’assertion qui enclot cet énoncé dans une déclaration métathéorique sur sa validité, sur un domaine donné ou sa déductibilité d’un système d’axiomes. En généralisant cette distinction, un jugement est compose :

- ✓d’une description ou modèle exprimé dans un certain «langage», (ou dans une certaine « théorie ») renvoyant éventuellement à « une réalité» (c’est-à-dire au dispositif du jeu en cours) ;
- ✓et d’un jugement sur l’adéquation de cette description, sur son caractère de contingence ou de nécessité ou sur sa consistance au regard des connaissances du sujet ou du milieu. » (p. 100)

« Toutes les assertions de la théorie sont susceptibles de se voir explicitées et remises en question. La théorie elle-même est un objet d'étude et de construction » (Brousseau, 1998, p. 111)

2.

La théorie élémentaire des modèles pour analyser L'activité de recherche mathématique

Modèle d'une formule

Un langage formalisé $\mathcal{L}$, une syntaxe, des énoncés bien formés (des formules) : *F*, *G*, *H*…

Une structure interprétative Σ (un domaine de réalité, une théorie mathématique)

Σ est *un modèle* d'une formule *F* de $\mathcal{L}$ si et seulement si l'interprétation de *F* dans Σ est un énoncé vrai.

Conséquence logique d’un point de vue sémantique

Tarski définit la notion *de conséquence logique d’un point de vue sémantique* :

La proposition X suit logiquement de la classe de propositions K si tout modèle de K est un modèle de X (Tarski, 1936-b, 1972, *Sur le concept de conséquence*)

Quelques exemples classiques

- « $\neg(\forall x(P(x)))$ » *suit logiquement* de « $\exists x(\neg P(x))$ » (1)
- « $\exists x\,(\neg P(x))$ *suit logiquement* de « $\neg(\forall x(P(x)))$ » (2)
- « q(x) » *suit logiquement* de « $p(x) \wedge (p(x) \Rightarrow q(x))$ » (3)
- « $\neg p(x)$ » *suit logiquement* de « $\neg q(x) \wedge (p(x) \Rightarrow q(x))$ » (4)

- *(1) et (2) correspondent à l'inter définissabilité des deux quantificateurs du calcul des prédicats et à la règle du contre-exemple en mathématiques*
- *(3) correspond au Modus Ponens dans le calcul des prédicats*
- *(4) correspond au Modus Tollens dans le calcul des prédicats*

Le théorème de la déduction en théorie des modèles

- « Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie ; et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre » (…)

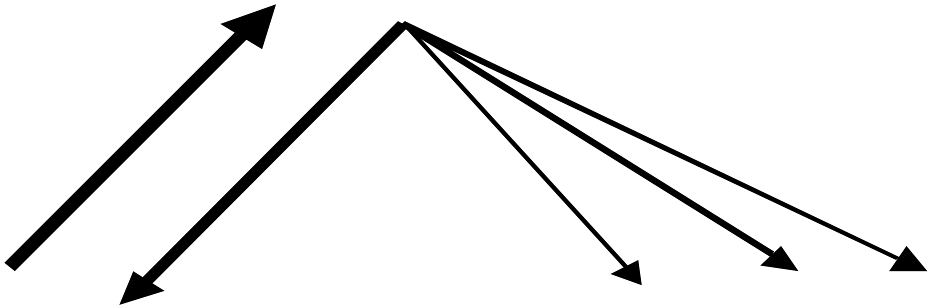
- « Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (p.12)

Méthodologie des Sciences déductives

(Tarski, 1960, *Introduction à la logique*)

Système axiomatique formel

(sans référence à des objets)



Mini-théorie déductive

Termes primitifs

Termes définis

Axiomes

Théorèmes

Modèles

Univers du discours

Interprétation

des lettres

Preuves par interprétation

Pour prouver qu’un énoncé donné de la théorie n’est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la formule associée à cet énoncé.

Preuves par interprétation

Un système axiomatique formel

(sans référence à des objets)

Une formule Φ associée à F

Une théorie déductive T

Axiomes

Un énoncé vrai F

Un **Modèle** M

G l'interprétation de Φ

G est un énoncé faux de M

F n'est pas une conséquence logique des axiomes de T

Une théorie féconde pour comprendre l'activité mathématique

« La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie.(…) Une part essentielle de l'analyse épistémologique est ainsi ouvertement prise en charge par l'analyse logique. (…) En même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir. »

(Sinaceur, H. 1991b, Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ?, in *Hommage à Jean Toussaint Desanti*, TER)

Un exemple de travail de la théorie en géométrie des solides

- Déterminer tous les polyèdres réguliers, c’est-à-dire les polyèdres convexes, dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables, et ayant le même nombre de faces à chaque sommet.
- Ces polyèdres réguliers sont au nombre de cinq, ils sont connus sous le nom de *Solides de Platon* :
- Il n’y a pas de polyèdre régulier à faces hexagonales ; en effet, lorsque l’on assemble trois hexagones réguliers, on obtient un angle plein (de 360°), et il n’est donc pas possible d’obtenir un angle dièdre.

- Le protocole dont nous analysons un bref extrait a été recueilli (et transcrit) par Thierry Dias dans le cadre d'un stage de formation continue auprès de professeurs de l'Adaptation et L'Intégration Scolaire (AIS).
- Nous travaillons sur la transcription des échanges à l'intérieur d'un groupe de quatre stagiaires - Simon, Julie, Charles, et Georges -, à un moment où ils mettent en relation ce qu'ils sont en train d'expérimenter avec le matériel fourni et leurs connaissances mathématiques concernant la possibilité ou non de réaliser un polyèdre régulier à face hexagonales.
- Au début du travail, Julie exprime l'idée qu'il y a une infinité de tels polyèdres, « puisque je peux avoir un triangle, un carré, un pentagone, un hexagone, … », tandis que Georges émet des doutes sur la possibilité de le faire et déclare qu' « il y a une loi obligatoirement quelque part ».

- Pendant ce temps, Simon essaye de faire la construction avec des pentagones tandis que Charles, qui est convaincu de la possibilité de le faire, essaye avec des hexagones.

- Apparaît alors l'idée du ballon, puis la recherche d'une progression entre nombre de faces du polyèdre et nombre de côtés du polygone.

- Simon est maintenant également convaincu que c'est possible avec des hexagones.

- Comme le matériel est souple, ils essayent de donner du volume ; la notion d'angle commence à apparaître.

1. *Georges* : « tu imagines qu'en s'ouvrant un petit peu plus à chaque fois… »

2. *Simon* : « Ouais, ouais, l'angle, un petit angle en plus et tu peux faire

3. *Charles* : « Bien sûr

4. *Simon* : « .. . des milliers des.. t'as les diamants qui ont je sais pas combien de facettes (*Il montre avec les mains les contours d'une sorte de sphère*)

5. *Charles* : « Oui »

6. *Simon* : « c'est des trucs à faces régulières qui en ont des centaines des fois ».

- 7. *Georges* : « Non, mais moi, je crois que ça ne marche pas ; ça correspond tu sais au pavage au sol quand on pose des carreaux ça reste plat, jamais tu peux en faire un truc. (…) des carreaux que tu mets au sol dans ta maison.
- 8. *Simon* : « ouais mais moi, pour moi, si est-ce que, … ouais mais là, est-ce qu'il est possible que ça forme un ça forme un angle… »
- 9. *Georges* : « regarde, tu retombes de nouveau sur une figure qui est pratiquement identique, sur un grand… machin, tu vois… sur un grand euh hexagone… donc on va retomber sur le même problème, de nouveaux quand tu en auras fait plein comme ça. »

- 10. *Charles* : « mais là aussi ; là aussi je retombe sur … ah oui, mais je ne suis pas en ligne droite »
- 11. *Simon* : « ce qui compte c'est que quand on a cinq côtés ça peut faire un angle qui…je sais pas combien ça fait… »
- 12. *Georges* : « Oui »
- 13. *Simon* : « 100…100….115 degré »
- 14. *Georges* : « hum.. »
- 15. *Simon* : « alors que dès que tu en as six, tu peux plus faire d'angles ».
- 16. *Georges* : « Voilà »

Evolution de la « théorie locale du groupe»

Au début, cette théorie $\mathcal{T}$ contient la définition et deux axiomes explicités :

•***A_1 : Il y a exactement un polyèdre régulier par polygone régulier***

•***A_2 : Il y a une infinité de Polygones réguliers convexes***

Deux conséquences logique de $\mathcal{T}$:

•*E_1 : il est possible de réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales,*

•*E_2: il y a une infinité de polyèdres réguliers.*

Un nouvel énoncé existentiel :

• *E_3 : il existe des polyèdres réguliers ayant un très grand nombre de faces.*

La négation de l'énoncé *$E_{1,}$* soit *E_4 :*

• *E_4 « On ne peut pas réaliser un polyèdre régulier avec des faces hexagonales » / « Aucun polyèdre régulier n'a des faces hexagonales »*

Ceci s'appuie sur un nouvel axiome A_3 :

A_3 « On peut paver le plan avec des hexagones »

Un dernier axiome qui réorientera la recherche

A_4 : pour réaliser un polyèdre, il faut pouvoir faire un angle

Les deux énoncés contradictoires E_1 et E_4 sont en concurrence.

En vertu du principe de contradiction, il faut rejeter l'un des énoncés.

Dans une telle situation, on peut soit

a) travailler à établir l'énoncé existentiel E_1 ;

b) prouver que l'énoncé universel E_4 découle des axiomes ;

c) retravailler la théorie (axiomes et/ou définitions) ;

d) mettre en cause le dispositif expérimental.

G. commence par

- mettre en cause le dispositif expérimental (« prendre des trucs rigides »),
- puis propose un aménagement de la définition pour le solide que Charles et Simon cherchent à construire (« en jouant sur les petits espaces »)
- tandis que Simon et Charles sont sur la position a), jusqu'à l'échange que nous avons noté 8 dans lequel Simon introduit implicitement l'axiome supplémentaire :

***A_4* : pour réaliser un polyèdre, il faut pouvoir faire un angle** *(sous-entendu un angle polyèdre)*

.

- G. et S. tombent d’accord sur le fait que ceci permet d’éliminer E_1.
- Le rejet de E_1 détruit l’axiome A_1, en fournissant un contre-exemple (l’hexagone) à l’énoncé général.
- Ils s’engagent alors activement dans la résolution du problème avec la nouvelle théorie qui comporte les axiomes A_2, A_3 et A_4.
- Il faut noter toutefois que ceci n’est pas explicité dans le groupe et que l’énoncé E_2 (il existe une infinité de polyèdres réguliers) n’est pas remis en cause à ce moment là dans le groupe.
- Cet énoncé ne découle plus à ce moment-là des axiomes assumés; nous savons qu’il est faux, mais leur recherche va cependant les conduire à le tenir pour vrai en considérant les polyèdres convexes obtenus avec les losanges.

.

Conclusion

Parce qu'elle adopte un point de vue sémantique et se situe sur un plan métamathématique, la théorie des modèles fournit un cadre pour analyser l'activité des sujets en situation de résolution de problème, en particulier en mettant à la disposition du chercheur une méthodologie pour repérer et étudier l'élaboration, l'évolution et le dépassement éventuel des axiomatiques locales.

Pour autant, il lui manque la dimension dialogique très présente dans le modèle de Brousseau.

3. La sémantique des jeux comme outil d'analyse des dialogues en situation de validation

Hintikka (1994)

•distingue « jeux d’extérieur » de découverte effective, et « jeux d’intérieur », jeux de preuve inférentielle (validité logique).

•Il introduit la question de la vérité matérielle en faisant appel à la construction de modèles dans lesquels les propositions atomiques acquièrent une valeur de vérité. »

•La nature joue le rôle d’opposant.

Vernant (2004) se propose de préciser l'aspect dialogique de la recherche de la vérité.

il distingue la véracité (le fait de dire ce que l'on croit vrai) et la véridicité (qui résulte d'un accord entre les interlocuteurs au terme d'une interaction) :

« Seule la véridicité met en jeu directement la vérité dans sa dimension dialogique en ce qu'elle résulte d'un accord obtenu au terme d'une interaction entre les interlocuteurs : ceux–ci s'entendent pour admettre comme vraie une proposition »

(Vernant, 2004, p.88)

Vernant (2004) modifie le modèle de Hintikka en considèrant la nature « non comme opposant, mais comme tiers sanctionnant la véridicité des propositions atomiques avancées par les deux interlocuteurs » (p. 100)

Ceci revient à modifier la règle structurelle qui stipule que le proposant ne peut asserter une proposition atomique que si elle a déjà été introduite par l'opposant, en la remplaçant par une règle qui stipule que : « Les propositions atomiques assertées par chaque interlocuteur sont vérifiées par une procédure transactionnelle acceptée conjointement par les deux interlocuteurs » (ibid., p. 100)

L’auteur précise que ceci « ne peut se jouer que si l’interaction trouve sens et finalité dans une transaction effective où il s’agit de résoudre un problème dans une situation déterminée qui possède ses propres procédures de vérification et d’action » (ibid., p. 101).

Cette validation externe pouvant être de différent type (consultation d’un expert, appel à un texte de référence, à un protocole expérimental,…).

Nous sommes ici très près du type de questions auxquelles le schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques tente de répondre.

Dans son travail de thèse, Thomas Barrier (2009) a exploré ce que pourrait apporter la sémantique des jeux de Hintikka pour l’étude des interactions langagières en situation d’élaboration de preuves mathématiques tant du point de vue de la compréhension de l’activité des sujets (conjecture, argumentation, preuve), que pour la modélisation de cette activité ; ceci l’a conduit à prendre en compte la correction proposée par Vernant (2004) dans le cadre de la logique de la véridicité qui se révèle prometteuse pour l’élaboration d’outils d’analyse.

Dans sa thèse, il a effectué une relecture des fondements de la TSD en explorant les possibilités offertes par la sémantique selon la théorie des jeux de Hintikka (sémantique GTS) et par la Logique Dialogique de la Véridicité (LDV) de Vernant, mettant ainsi en lumière la pertinence de développer une analyse sémantique et dialogique de l'activité de validation en mathématiques.

Ce développement d’un point de vue sémantique et dialogique sur l’activité de validation s’accompagne d’une proposition de modélisation de l’activité langagière qui permette de rendre compte de l’intervention d’éléments extra-langagiers (les éléments du *milieu*) au cours des processus de validation.

Cette proposition s’appuie notamment sur la Logique de la véridicité de Vernant, mais a nécessité l’introduction de jeux de description, en cours d’approfondissement.

Un dernier commentaire

La logique dont nous parlons est l'héritière de la logique d'Aristote qui s'est construite sur la langue grecque. C'est une logique qui s'efforce de rester au plus près des langues ordinaires indo européennes . De ce fait, pour un locuteur de ces langues, l'articulation entre logique, langage et raisonnement apparaît comme assez naturelle.

Il est prévisible que d'autres questions se posent pour les apprentissages lorsque d'autres familles de langues sont en jeu.

Conclusion

L'analyse logique du langage permet de questionner l'illusion de transparence du langage mathématique, en particulier parce qu'elle permet de débusquer des ambiguïtés et des implicites.

Elle offre ainsi des outils pour enrichir les analyses a priori et a posteriori, et pour analyser les preuves et les situations de validation.

Pour les travaux présentés ici, je suis redevable

✓ à Gilbert Arsac, Clude Tisseron, Faiza Chellougui, Imed Ben Kilani, Rahim Kouki, Thierry Dias, Thomas Barrier, et Judith Njomgang Ngansop,

✓aux enseignants, élèves, étudiants, doctorants ayant participé (parfois sans le savoir) aux expérimentations.

References

Durand-Guerrier, V. 2003, Which notion of implication is the right one ? From logical consideration to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics, 53*, 5-34.

Durand-Guerrier, V. Truth versus validity in mathematical proof, *ZDM The International Journal on Mathematics Education 40/3,* 373-384

Quine, W.V.O. (1950) *Methods of logic*, holt, Rinehard & Winston

Tarski, A. 1936a The concept of truth in the language of deductive sciences. English translation in Tarski (1983), pp. 152–278.

Tarski, A. 1936b On the concept of logical consequence, English translation in Tarski (1983) pp. 409-420.

Tarski, A. (1983). Logic, semantics, metamathematics, papers from 1923 to 1938, Indianpolis, john Corcoran